Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Weber, Christof

DOI: https://doi.org/10.1007/BF03339054

Christof Weber

Mathematische Vorstellungen bilden

Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Christof Weber ist Mathematiklehrer an einem Schweizer Gymnasium (10. bis 13. Jahrgangsstufe) und war von 2003 bis 2006 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Gymnasial- und Berufspädagogik der Universität Zürich.

Die vorliegende Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Zürich im Wintersemester 2006/07 auf Antrag von Prof. Dr. Urs Ruf und Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker als Dissertation angenommen.

Christof Weber
Mathematische Vorstellungen bilden
Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht
der Sekundarstufe II
ISBN 978-3-03905-372-8

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet
unter http://dnb.ddb.de abrufbar.

1. Auflage 2007

Satz: durch den Autor mit LaTeX und KOMA-Script

Diese Darstellung mag einem Mathematiker, der sich nicht für Methodisches interessiert, zu weitläufig erscheinen. Aber was hier dargestellt wird, sind tatsächlich nicht einfach Lösungen, sondern die Entstehungsgeschichten von Lösungen.

Georg Pólya

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser mathematikdidaktischen Arbeit geht es um *mathematische Vorstellungsübungen*, ein neues Unterrichtsinstrument für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. In einem kurzen Eingangsbeispiel sei deshalb vorab verdeutlicht, wie eine Vorstellungsübung aussieht.

„Stell dir einen Plastikbecher vor, der auf dem Boden liegt und zu rollen beginnt. Entlang welcher Bahn bewegt er sich?“

Dieses Beispiel ist charakteristisch, denn: In mathematischen Vorstellungsübungen wird ein mathematischer Sachverhalt beschrieben, der in ein außermathematisches, reales Umfeld eingebettet ist. Die Beschreibung enthält bildhafte, eher statische Momente, aber auch solche der Bewegung. Sie bietet nur Anhaltspunkte und bleibt insgesamt skizzenhaft. Damit wird ein Terrain für die individuelle Ausgestaltung und Erschließung des Sachverhalts und dessen Umfeld geschaffen. So wird weder die Form noch die Größe oder Dicke des Bechers spezifiziert, auch wenn das Wort „Plastikbecher“ einen geraden Kreiskegelstumpf von handlicher Größe suggeriert. Auch die Neigung des Bodens, seine Beschaffenheit oder die Geschwindigkeit des Rollens bleiben ungenannt. Unter welchem Blickwinkel der Becher gesehen wird, ob von oben oder eher von der Seite, wird gar nicht angesprochen. Trotzdem können sich beim Lesen des ersten Satzes Vorstellungen einstellen, welche die Beschreibung ausmalen. Dies gilt insbesondere, wenn man diesen Satz nicht selbst liest, sondern ihn hört.

Im zweiten Satz wird eine mathematische Frage formuliert, deren Beantwortung von der individuellen, konkreten Ausgestaltung des beschriebenen Sachverhalts abhängt. Unter Bezug auf frühere Erfahrungen bzw. mathematische Basiskenntnisse stellen sich Vermutungen wie „der Becher rollt um die Kurve“, „der Becher eiert über den Boden“ oder „die Gestalt der Bahn hängt von der Form und der Masseverteilung des Bechers ab“ ein. Ob es sich dabei um eine geschlossene oder sogar kreisförmige Bahn handelt, ist zunächst einmal unsicher, ebenso, welche geometrischen und physikalischen Größen des Bechers die exakte Gestalt der Bahn festlegen. Eigene, modellhafte Vorstellungen – wie ein einachsiges Gefährt mit zwei über eine Achse starr miteinander verbundenen ungleich großen Rädern, eine zu einem Kreisring zusammengesetzte mehrfache Abwicklung der Mantelfläche des Bechers oder ein über den Kegelstumpf des Bechers hinaus gedachter Vollkegel – können zur Beantwortung der mathematischen Frage hilfreich sein. Andere ungenannte Vorstellungen wie etwa ein Windstoß, welcher auf die Bahn des Plastikbechers einwirkt, sind für die Beantwortung der mathematischen Frage störend. Aber auch neue Fragen können sich stellen: Gibt es einen anders geformten Becher, der entlang der (in gewissem Sinne) gleichen Bahn rollen würde? Wie ändert sich die Bahn, wenn der rollende Plastikbecher eine andere Form hätte?[1]

Dieses Eingangsbeispiel illustriert den Gegenstand dieser Arbeit, mathematische Vorstellungsübungen. Ich habe sie systematisch während meiner Unterrichtstätigkeit in gymnasialen Klassen der Sekundarstufe II (10. bis 13. Jahrgangsstufe) einer Schweizer Staatsschule entworfen, regelmäßig eingesetzt und kontinuierlich weiterentwickelt.

Welche Beweggründe führten mich dazu, mathematische Vorstellungsübungen zu entwickeln? Wie wohl die meisten frisch gebackenen Mathematiklehrer versuchte ich, im Unterricht meine Begeisterung für das Fach zu vermitteln, jedoch mit mäßigem Erfolg. Einzelne Gymnasiastinnen und Gymnasiasten interessierten sich zwar für Mathematik und engagierten sich im Unterricht auch dementsprechend. Die meisten vermochte ich jedoch mit meinem Unterricht, wie mir schien, bestenfalls im Sinne einer Qualifikations- oder Anpassungsorientierung zu aktivieren („Was könnte der Lehrer von mir hören wollen?“). Von Eigeninitiative oder einer eigenen Beziehung zum Fach konnte hier kaum die Rede sein.

Wenn ich Mathematikaufgaben erklärte, musste ich darüber hinaus immer wieder feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler mit an und für sich richtigen Hinweisen von mir wenig anfangen konnten. Sie empfanden diese Hinweise für ihre Lösungsfindung manchmal sogar als störend oder hinderlich. Hörte ich ihnen jedoch bei der Entwicklung ihrer eigenen Ansätze zu, trat mir oft ein unerwarteter Reichtum an Ideen entgegen. Bei genauerem Hinhören ließen sich neben irrigen jeweils auch richtige Ideen ausmachen, die allerdings so manches Mal ‚quer‘ zu *meinen* Lösungsideen standen. In den Köpfen der Schülerinnen und Schüler sahen einige Sachverhalte deutlich anders aus, als ich das im Voraus zu wissen meinte. Mit anderen Worten: Es gelang mir nicht,

[1] Die Idee, sich vorzustellen, wie die Bahn eines rollenden Bechers aussieht, stammt aus [Mason 2002].

mit den mir damals bekannten Unterrichtsinstrumenten und -methoden die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler zur Eigentätigkeit anzuregen und zugleich in ihre Köpfe zu ‚schauen', um an ihre Vorkenntnisse anschließen zu können.

Durch verschiedene Anregungen von außen (Gespräche, Literatur, eigene Erfahrungen) entstand die Idee, *Vorstellungen*, die mit mathematischen Fragen zusammenhängen, zu thematisieren. Vorstellungen werden (wie Gedanken) als eigen und persönlich beeinflussbar erlebt. Deshalb könnte, so meine Intention, der Blick auf Vorstellungen allen am Unterrichtsgeschehen Beteiligten dienlich sein: Schülerinnen und Schüler könnten ihre Vorstellungen für eine eigenständige Auseinandersetzung mit fachlichen Fragen aktivieren und einsetzen. Dabei würden sie erfahren, dass Mathematik auch von ihnen abhängt, und stellten so eine Beziehung zur Mathematik her. In Ergänzung dazu erhielte ich als Lehrer einen besseren Einblick in die Art und Weise, wie Schülerinnen und Schüler an fachliche Fragestellungen herangehen und mathematisch denken. Infolgedessen könnten stärker entwicklungsorientierte Aspekte des Lernens und Lehrens in den Mittelpunkt des Unterrichts rücken. Kurz: Mathematische Vorstellungsübungen verfolgen neben *fachlichen* auch *pädagogische* Anliegen.

So habe ich im Laufe meiner Unterrichtstätigkeit über sechzig verschiedene mathematische Vorstellungsübungen entworfen, eingesetzt und in [Weber 1998] und [Weber 2002] erstmals beschrieben. Damit ist das Unterrichtsinstrument zwar ein erprobtes und praktikables Konzept, es wirft aber auch vielerlei Fragen auf. Da ich in der Fachliteratur weder Antworten noch vergleichbare, ähnlich konsequent auf Vorstellungen zugespitzte Unterrichtsinstrumente fand, sollte es nach dem Entwurf und der praktischen Erprobung von Vorstellungsübungen darum gehen, das zugrunde liegende, implizite Konzept genauer zu verstehen und zu fundieren, um es kommunizierbar zu machen. So entstand diese Arbeit.

Das Erkenntnisinteresse dieser Arbeit kreist also um Fragen der Entwicklung und Erforschung eines neuen Unterrichtsinstruments:

- Wie sind Vorstellungsübungen mathematikdidaktisch einzuordnen und zu begründen?

- Welche Vorstellungen können durch die Vorstellungsübungen angesprochen werden? Welche Anforderungen stellen Vorstellungsübungen an die Schülerinnen und Schüler?

- Wie lassen sich Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht verwenden? Was ist ihr mathematikdidaktisches Potenzial?

Zur Beantwortung werden exemplarisch einige Vorstellungsübungen, die dazu gehörende Unterrichtsumgebung und die Erfahrungen, die meine Klassen und ich damit gemacht haben, vor dem Hintergrund naheliegender mathematikdidaktischer Konzepte positioniert und vor dem Hintergrund mathematikdidaktischer Bezugswissenschaften analysiert. Dadurch kann das Unterrichtsinstrument besser verstanden werden und dieses Verständnis wird kommunizierbar. Mein Erfahrungswissen bezüglich der Vorstellungsübungen wird nicht nur anderen Mathematiklehrkräften für deren Unterrichtspraxis vermittelbar, sondern wird zugleich der Diskussion in der mathematikdidaktischen Forschung zugänglich gemacht.

Wie schon an der Verschiedenartigkeit und Breite der Fragen abzulesen ist, stellt diese Arbeit keine Überprüfung der Wirksamkeit von Vorstellungsübungen (etwa im Sinne einer Leistungsverbesserung der Lernenden) oder der Verallgemeinerbarkeit meiner Erfahrungen (etwa auf andere Klassen) dar. Mein Anspruch ist, das Unterrichtsinstrument der Vorstellungsübungen genau zu beschreiben und tiefer zu verstehen und einzuordnen. Erst in Folge einer begrifflichen Bestimmung von Vorstellungen und Vorstellen vor dem Hintergrund der Mathematikdidaktik wären Lehrpersonen mit ihren Klassen für entsprechende Folgestudien zu gewinnen. Indem diese Studie Erfahrungswissen im Umgang mit mathematischen Vorstellungsübungen aufarbeitet und analysiert, werden Erträge nicht auf dem Gebiet der quantitativen als vielmehr auf dem der qualitativen Empirie gesucht. Mit der Entwicklung und Erforschung mathematischer Vorstellungsübungen zielt diese Arbeit demnach auf die *Exploration eines neuen Unterrichtsinstruments.*

1 Konzeption der Arbeit

Nachfolgend werden Inhalt und Anlage dieser Arbeit erläutert und begründet. Zudem werden die in der Einleitung formulierten Fragen in konkretere Forschungsfragen ausdifferenziert, die den weiteren Fortgang leiten und gliedern.

Aktionsforschung

Bezüglich der Vorstellungsübungen nehme ich eine *doppelte Rolle* ein. Während ich über Jahre Vorstellungsübungen für meinen Mathematikunterricht entwarf und einsetzte, untersuche ich hier das Unterrichtsinstrument nun.[1]

Damit ist diese Studie methodologisch der *Aktionsforschung* zuzuordnen. Wie Herbert Altrichter und Peter Posch in ihrem Buch *Lehrer erforschen ihren Unterricht* schreiben, beinhaltet Aktionsforschung „die systematische Untersuchung beruflicher Situationen, die von Lehrerinnen und Lehrern selbst durchgeführt wird, in der Absicht, diese zu verbessern“ [Altrichter & Posch 1998, S. 13]. Sie ist „Forschung der Betroffenen“, die sich auf konkrete „Aktionen“, das heißt ihre Unterrichtshandlungen bezieht sowie „Fragestellungen aus ihrer eigenen Praxis“ aufgreift [ebd., S. 15]. Wie die Autoren hervorheben, werden dabei „das Handeln in der Praxis und das Schlüsse-Ziehen aus der Handlungserfahrung, [...] also Aktion und Reflexion eng und immer wieder aufeinander bezogen“ [ebd., S. 16]. Die Reflexion eigener Aktionen führt zu Erkenntnissen, die handlungsrelevant sind: „Sie will sowohl die untersuchte Praxis als auch das Wissen über diese Praxis entwickeln.“ [Ebd., S. 21] Solche Reflexion wird in der Aktionsforschung in die drei Phasen „Beobachtung und Informationssammlung – Interpretation und Theorieformulierung – Aktionsvorschläge“ gegliedert, woraus sich der Forschungskreislauf der Aktionsforschung ergibt. Er ist schematisch in Abbildung 1.1 dargestellt (nach [Altrichter & Posch 1998, S. 17, 22], Bearbeitung C. W.).[2] Für die vorliegende

[1] Ich habe Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht von 1992 bis 2003 eingesetzt.

[2] Die Aktionsforschung ist eine Methode der qualitativen, schulbezogenen Sozialforschung. Für einen Überblick über die Aktionsforschung siehe [Wieser 1996], zu ihren theoretischen Grundlagen siehe etwa [Altrichter & Posch 1998, S. 318 ff.], [Altrichter 2004, S. 121–127], [Fatzer 1998, S. 275–280] oder [Klauer 2001]. Zu ihrem Einsatz und ihrer Diskussion im mathematikdidaktischen Kontext siehe [Krainer et al. 1999].

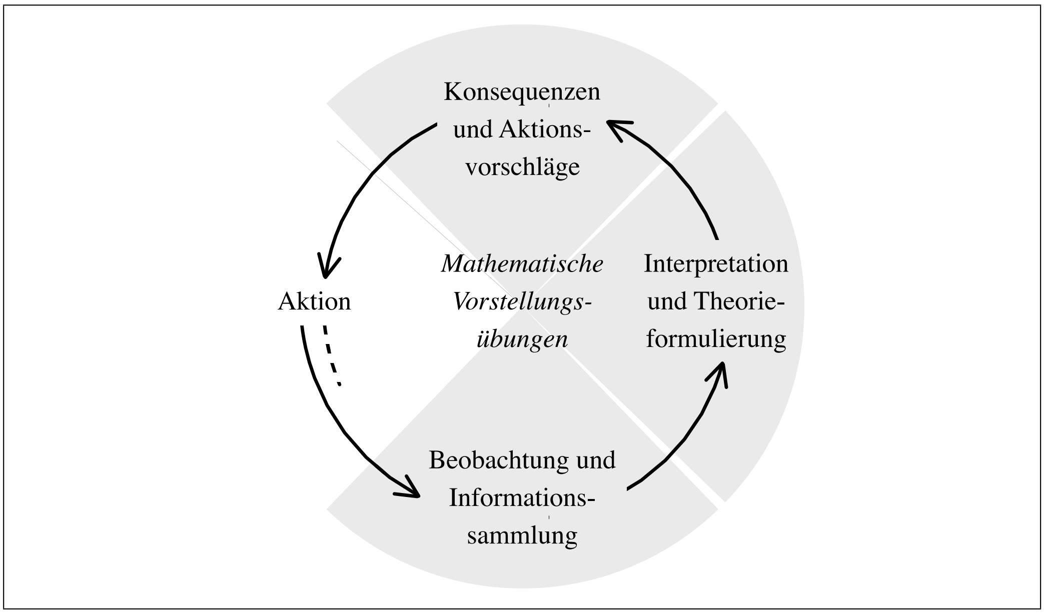

Abb. 1.1: Vorstellungsübungen im Kreislauf der Aktionsforschung

Arbeit können die vier Phasen eines solchen Kreislaufs wie folgt interpretiert werden:

1. Der Einsatz mathematischer Vorstellungsübungen im Unterricht stellt den *Forschungsausgangspunkt* dar. Er ist die „Aktion“ aus meiner Unterrichtspraxis und umfasst sowohl das Entwerfen als auch das Durchführen von Vorstellungsübungen in meinem Unterricht.

Auf diese Aktion, die zeitlich vor dieser Arbeit entstand und stattfand, richtet sich das Erkenntnisinteresse der vorliegenden Studie. Sie wird in drei Phasen *reflektiert* (in Abb. 1.1 grau unterlegt):

2. Die „Beobachtung und Informationssammlung“ bezieht sich auf Unterrichtserfahrungen mit mathematischen Vorstellungsübungen. Damit sind eigene Erfahrungen gemeint, aber auch Erfahrungen, die meine Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in einem Feedback zu den Vorstellungsübungen formulierten.

3. In der Phase der „Interpretation und Theorieformulierung“ versuche ich, die Aktion und die Beobachtungen tiefer zu verstehen. Sie stellt den *Schwerpunkt* meiner Arbeit dar. Zuerst wird in der „Theorieformulierung“ der Begriff der Vorstellung vor dem Hintergrund psychologischer und mathematikdidaktischer Literatur bestimmt. Ebenfalls

wird gezeigt, welche Beziehungen zwischen Vorstellungen und Mathematik bestehen und wie die mathematikdidaktische Bedeutung von Vorstellungen begründet werden kann. Damit klärt sich das Konzept, das dem Unterrichtsinstrument zugrunde liegt. In der „Interpretation“ werden die Texte und insbesondere die Anforderungen einiger Vorstellungsübungen aufgrund des gewonnen Begriffsverständnisses analysiert sowie die Möglichkeiten ihrer Verwendung im Unterricht diskutiert. Aufgrund der Unterrichtserfahrungen sowie der Antworten aus der Befragung werden darüber hinaus die Effekte, die von einem Einsatz von Vorstellungsübungen erwartet werden, begründet.

4. In der vierten Phase werden „Konsequenzen und Aktionsvorschläge“ erarbeitet. Zuerst werden einige Probleme bei Vorstellungsübungen genannt sowie Modifikationen vorgeschlagen, um diese Probleme aufzufangen. Anschließend wird die Unterrichtsumgebung ausgebaut, um deren Impulse stärker als bisher im Mathematikunterricht zu nutzen.

Auch nach der vierten Phase kann nicht erwartet werden, dass die weiterentwickelte Aktion der Vorstellungsübungen allen Bedürfnissen genügen würde oder nicht mehr weiterzuentwickeln wäre. Vielmehr muss sie wieder in der Unterrichtspraxis eingesetzt und erneut erprobt sowie reflektiert werden. Damit stellt eine Arbeit wie die vorliegende nur einen ersten Umlauf durch den Kreislauf der Aktionsforschung dar, der *iterativ* angelegt ist (in Abb. 1.1 durch das gestrichelte und überlappende Kurvenstück angedeutet).

Neben der Weiterentwicklung der eigenen Unterrichtspraxis geht es bei Aktionsforschung immer auch darum, „das Wissen über diese Praxis“ zu entwickeln [Altrichter & Posch 1998, S. 21]. Dadurch soll entsprechendes Erfahrungswissen anderen Lehrkräften zugänglich gemacht und in die Diskussion der pädagogischen Forschung eingebracht werden [ebd., S. 19]. Auch in diesem Punkt besteht eine Analogie zwischen der vorliegenden Arbeit und der Aktionsforschung, da in beiden Fällen eigene Erfahrungen und leitende Konzepte hinsichtlich der Unterrichtspraxis aufgearbeitet und expliziert werden.[3]

[3] In der Pädagogik wird nicht nur der geringe Nutzen der Grundlagenforschung für die praktische Unterrichtsgestaltung beklagt. So kann Weinerts Aufruf, „nicht nur in den Ergebnissen der Grundlagenforschung nach Anwendungsmöglichkeiten“ zu suchen, sondern „auch mit anwendungsorientierten Fragestellungen Grundlagenforschung zu betreiben“, als Plädoyer dafür gelesen werden, dass aus der Unterrichtspraxis heraus entwickelte Ergebnisse und Fragen – und damit Aktionsforschung – für die Pädagogik von Interesse sind. [Weinert 1996, S. 41]

Gütekriterien

Die Doppelrolle von Lehrer und Forscher wirft *forschungsmethodische Fragen* auf, die schon von der Kritik an der Aktionsforschung her bekannt sind: Wie kann jemand, der als Subjekt am Unterricht beteiligt ist und im Unterricht handelt, diese seine eigene Unterrichtspraxis mit der wissenschaftlich nötigen Distanz und Objektivität untersuchen und reflektieren? Welche Bedeutung und Qualität können entsprechende Befunde haben?[4]

Altrichter und Posch gehen auf solche Vorbehalte ein und überprüfen ihre Stichhaltigkeit. Zum einen räumen sie ein: „Diese Einwände (mangelnde Distanz, Gütekriterien, Verallgemeinerung) thematisieren tatsächlich kritische Punkte, an denen sich die Brauchbarkeit und Zuverlässigkeit von Forschungsergebnissen entscheidet.“ [Altrichter & Posch 1998, S. 331 f.]. Zum anderen behaupten sie aufgrund ihrer Analysen von Qualitätskriterien quantitativer Forschung: „Es gibt keine Forschungsdesigns, die diese kritischen Punkte von vornherein aus der Welt schaffen könnten.“ [Ebd., S. 332] Mit anderen Worten muss sich *jede* Form von Forschung, ob nun quantitative Sozialforschung oder qualitative Aktionsforschung, gewissen *Gütekriterien* stellen.

Für die Aktionsforschung fordern Altrichter und Posch deshalb vor allem das Kriterium des „Hinzuziehens alternativer Forschungsperspektiven“. Sie formulieren es in Analogie zu den klassischen Gütekriterien der empirischen Forschung: Objektivität, Reliabilität und Validität. Alle drei beruhen auf dem Gedanken der Wiederholung, „auf dem Vergleich der Sichtweisen beim wiederholten Betrachten eines Ereignisses“. Da diese Kriterien der traditionellen empirischen Forschung aus „praktischen und prinzipiellen Erwägungen“ (Aufwand, Komplexität und damit Unvergleichbarkeit realer Unterrichtssituationen) kaum anwendbar sind, fordern die beiden Autoren, *alternative Perspektiven durch andere Forschungsmethoden* sowie *alternative Perspektiven anderer Personen* hinzuzuziehen.[5] [Ebd., S. 103–106]

[4] Die Wissenschaftlichkeit der Aktionsforschung ist insbesondere aufgrund des Involviertseins der Forscherinnen und Forscher nicht unumstritten [Wieser 1996]. Für Kritik aus Sicht der pädagogischen Psychologie siehe etwa [Klauer 2001, S. 83], für solche aus Sicht der Mathematikdidaktik siehe [Hart 1998, S. 412]. Für eine umfassende Diskussion des Rollen-Dilemmas aus Sicht der qualitativen Sozialforschung siehe [Lamnek 2005].

[5] Die *Nichtübertragbarkeit* des naturwissenschaftlichen Forschungsparadigmas (Experimental- vs. Kontrollgruppe, Einsatz von Statistik zur Signifikanzüberprüfung usw.) auf mathematikdidaktische Forschung wird von Schoenfeld gründlich diskutiert. Er schlägt stattdessen Kriterien wie „descriptive power“ oder „falsifiability“ vor, nach denen die Güte mathematikdidaktischer Modelle und Ergebnisse zu beurteilen sei. [Schoenfeld 2000]

In der Diskussion darum, welche mathematikdidaktische Forschungsmethode wissenschaftlich fundierte und gleichzeitig praxisrelevante Ergebnisse liefert, wird m. E. zu selten

Die vorliegende Arbeit berücksichtigt alternative Forschungsperspektiven in zweierlei Hinsicht: Zum einen wurden in ihrem Vorfeld einige meiner Klassen befragt, wie sie Vorstellungsübungen akzeptieren. Deshalb fließt in diese Arbeit nicht nur eigenes Erfahrungswissen, sondern auch die Sicht einiger an Vorstellungsübungen beteiligter gymnasialer Klassen ein. Zum anderen wurden Vorstellungsübungen im Rahmen verschiedener mathematikdidaktischer Foren vorgestellt sowie im Zusammenhang mit Weiterbildungsanlässen von Praktikerinnen und Praktikern im Mathematikunterricht erprobt. Durch die in den Diskussionen erfahrenen, vielfältigen *Fremdperspektiven* wurde das Unterrichtsinstrument hinterfragt und weiterentwickelt.

Trotz des auch von der Aktionsforschung selbst vorgenommenen Versuchs, die genannten forschungsmethodischen Einwände zu entkräften, wird dies nicht vollständig gelingen. Ludwig Bauer schlägt deshalb vor, die Doppelrolle einer Person *selbstkritisch* in dem Sinne zu nutzen, dass der *Lehrer* der Theorie gegenüber skeptisch ist (und bleibt) und dass der *Forscher* unterrichtspraktisches Handeln kritisiert: „Das Modell des in Personalunion forschenden Lehrers und praktisch handelnden Wissenschaftlers steht und fällt daher wesentlich mit der Bereitschaft und der Fähigkeit zur Selbstkritik.“ [Bauer 1988, S. 465]

Auch diesem Anspruch versucht die vorliegende Arbeit nachzukommen. Zum einen werden in ihr die Möglichkeiten der Vorstellungsübungen untersucht sowie die Grenzen und Schwierigkeiten angesprochen, welche die Schülerinnen und Schüler mit dem Unterrichtsinstrument hatten. Zum anderen sind der Schwerpunkt der Reflexion und die Aktion zeitlich getrennt. In der daraus sich ergebenden Distanz werden Rollenkonflikt in Form miteinander interferierender Interessen und Haltungen des Lehrers und Forschers eher vermieden.

berücksichtigt, dass der Erfolg der Übertragung einer didaktischen Innovation auf andere Lehrpersonen mindestens so sehr von deren Haltungen und Menschenbild abhängt wie von der statistischen Absicherung der Ergebnisse. So wird eine Lehrperson, die sich ausschließlich dafür interessiert, den Unterrichtsstoff formal korrekt und sauber zu präsentieren, mathematische Vorstellungsübungen kaum mit Gewinn einsetzen.

Gliederung und Forschungsfragen

Die Reihenfolge der Kapitel entspricht der Genese der Untersuchung. Entsprechend beginnt die eigentliche Arbeit mit der Darstellung der Unterrichtspraxis mathematischer Vorstellungsübungen und ihrem Einsatz im Mathematikunterricht. In *Kapitel 2* (S. 15 ff.) wird also das Untersuchungsmaterial dargelegt und die *Aktion* beschrieben. Neben der Darstellung der eigentlichen Unterrichtsumgebung werden in diesem Kapitel die Texte von acht exemplarisch ausgewählten Vorstellungsübungen zitiert. In den vier folgenden theoretischen Kapiteln, der *Reflexion*, werden die Unterrichtsumgebung und die Texte von Vorstellungsübungen auf vier Gruppen von Forschungsfragen hin analysiert.

So werden in *Kapitel 3* (S. 35 ff.) eigene Beobachtungen und Erfahrungen mit Vorstellungsübungen geschildert. Ergänzend wird eine Befragung von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten zu Vorstellungsübungen vorgestellt. Sie wurde von mir während meiner Tätigkeit als Lehrer durchgeführt, um ein Feedback zu erheben, um mit den Klassen über Vorstellungsübungen ins Gespräch zu kommen und um weitere Handlungsimpulse zu gewinnen. In diesem Kapitel wird sie aus Sicht der Akzeptanz von Vorstellungsübungen gelesen und ausgewertet. Dazu wird vorab der Begriff der Akzeptanz für die gegebene Situation aufgearbeitet. Anschließend werden alle Schülerantworten im Hinblick auf folgende Frage strukturiert und deskriptiv ausgewertet:

(F1) Wie akzeptierten die befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten das neue Unterrichtsinstrument? Gab es geschlechtstypische Unterschiede?

Durch die entsprechenden Antworten werden die eigenen Beobachtungen mit den Einschätzungen der Schülerinnen und Schüler verglichen und präzisiert. Damit wird die Phase der „Beobachtung und Informationssammlung“ abgeschlossen.

Wie bereits am Eingangsbeispiel des rollenden Bechers erkennbar, gehen Vorstellungsübungen von der Annahme aus, dass Vorstellungen in Denkprozessen eine Rolle spielen. Was aber sind Vorstellungen? Wie sieht ihre Rolle in mathematischen Prozessen genau aus? Wo schließen Vorstellungsübungen an die Mathematikdidaktik an, wie gliedern sie sich ein?

In meiner Unterrichtspraxis verstärkte sich zunehmend der Eindruck, dass Vorstellungen in Vorstellungsübungen nicht nur in einem rein umgangssprachlichen, visuell-bildhaften Sinne angesprochen werden. Deshalb wird in *Kapi-*

tel 4 (S. 83 ff.) der Frage nach dem Begriffsverständnis von Vorstellung, das mathematischen Vorstellungsübungen zugrunde liegt, in einer ausführlichen Sichtung von mathematikdidaktischer und psychologischer Literatur nachgegangen:

(F2) Auf welchem Begriffsverständnis von Vorstellung basiert das Unterrichtsinstrument? Welche Bezüge zu mathematikdidaktischen Prinzipien und Unterrichtskonzepten weist es auf? Welches pädagogische Ziel verfolgen mathematische Vorstellungsübungen?

Es stellt einen wichtigen Teil dieser Arbeit dar, Anschlüsse und Begründungen der Vorstellungsübungen in der Mathematikdidaktik aufzuzeigen. Hier wird auch die Frage nach den pädagogischen Zielen von Vorstellungsübungen beantwortet, womit die „Theorieformulierung“ abgeschlossen wird.

Kapitel 5 (S. 133 ff.) unternimmt die Interpretation und Analyse des Unterrichtsinstruments. Es werden die in Kapitel 2 zitierten Texte von Vorstellungsübungen vor dem Hintergrund des in Kapitel 4 bestimmten Vorstellungsbegriffs und der mathematikdidaktischen Literatur analysiert. Insbesondere werden sie auf ihre Anregung wie auch auf die Nutzung der konstruierten Vorstellungen im Unterricht hin befragt:

(F3a) Welche Vorstellungen intendiert der Text jeder einzelnen Vorstellungsübung, welche Vorstellungen ermöglicht er? Zu welchen mathematischen Prozessen kann er im Mathematikunterricht führen?

Unter Einbezug der Beobachtungen aus Kapitel 3 und der pädagogischen Forschung wird zudem beschrieben, welche Effekte von Vorstellungsübungen auf Schülerinnen und Schüler erwartet werden:

(F3b) Welche Effekte in Bezug auf den Umgang mit Mathematik können von einem regelmäßigen Einsatz des Unterrichtsinstruments erwartet werden?

Die Antworten auf beide Fragen werden auch den doppeldeutigen Titel dieser Arbeit, „Mathematische Vorstellungen bilden“, erklären.[6]

Nach der Schilderung der Grenzen von und der Schwierigkeiten mit Vorstellungsübungen werden im letzten Kapitel des Reflexionsteils, dem *6. Kapitel*

[6] Dieses Wortspiel lehnt sich an den Titel *Vorstellungen bilden – Beiträge zum imaginativen Lernen* [Fauser & Madelung 1996] an.

(S. 215 ff.), einige Aktionsvorschläge gemacht. Sie dienen zur Modifizierung und zum Ausbau des Unterrichtsinstruments. Damit beantwortet dieses Kapitel folgende Fragen:

(F4a) Welchen inhaltlichen Grenzen unterliegen die Vorstellungsübungen?

(F4b) Welche Schwierigkeiten können beim Einsatz des Unterrichtsinstruments auftreten? Welche Ursachen sind denkbar? Wie kann ihnen begegnet werden?

(F4c) Wie lässt sich die Unterrichtsumgebung ausbauen, damit ihre Impulse stärker als bisher im Unterrichtsverlauf genutzt werden können?

Da diese Fragen unmittelbar auf den Unterrichtseinsatz mathematischer Vorstellungsübungen ausgerichtet sind, schließt sich der Kreislauf der Aktionsforschung.

In *Kapitel 7* (S. 235 ff.), dem letzten dieser Arbeit, werden alle Erträge der Untersuchung entlang den leitenden Forschungsfragen zusammenhängend dargestellt und Fragen formuliert, die aus dieser Arbeit erwachsende Forschungsperspektiven aufzeigen. Diese Zusammenfassung und dieser Ausblick eignen sich auch für eilige Leserinnen und Leser.

Teil I

Aktion

2 Mathematische Vorstellungsübungen

Vorstellungsübungen sind der Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit und bilden im Sinne der Aktionsforschung ihren Ausgangspunkt. Deshalb werden sie in diesem ersten Teil der Arbeit ohne ausgiebige Theorieleitung – insbesondere ohne den Begriff der Vorstellung genauer zu bestimmen – dargestellt.

Wie bei mathematischen Aufgaben kann auch bei mathematischen Vorstellungsübungen zwischen der *Unterrichtsumgebung* und dem eigentlichen *Text* der Vorstellungsübung unterschieden werden. Während in der Unterrichtsumgebung die ‚Spielregeln' und Randbedingungen festgelegt sind (zum Beispiel die Sozialform oder die Häufigkeit der Durchführung), enthält der Text die Vorstellungsanweisungen, die von den Lernenden auszuführen und zu bearbeiten sind.

In dieser Arbeit wird unter der Bezeichnung „mathematische Vorstellungsübungen" in der Regel die Gesamtheit von Unterrichtsumgebung und Texten der Vorstellungsübungen verstanden. Allerdings können an einzelnen Stellen aus Gründen des Sprachflusses darunter auch nur die Unterrichtsumgebung oder nur die Texte der Vorstellungsübungen verstanden werden. Welches Verständnis mit „mathematischen Vorstellungsübungen" jeweils intendiert ist, geht letztlich aus dem Kontext hervor.

2.1 Die Unterrichtsumgebung der Vorstellungsübungen

In diesem Abschnitt werden die beiden Phasen erläutert, in denen mathematische Vorstellungsübungen ablaufen und wie diese organisatorisch und inhaltlich in den Unterrichtskontext eingebettet sind.

2.1.1 Ablauf

Wie Abbildung 2.1 zeigt, gliedern sich Vorstellungsübungen normalerweise in zwei Phasen: eine Phase der *Vorstellungen* und eine Phase der *Besprechung*. Die Benennung der jeweiligen Phase sagt noch nichts darüber aus,

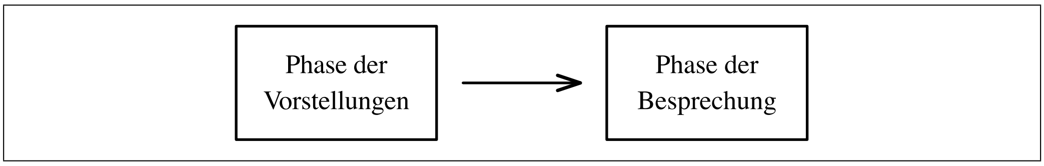

Abb. 2.1: Zwei Phasen einer Vorstellungsübung

welche Rollen der Lehrperson bzw. den Schülerinnen und Schülern zukommen. Deshalb wird im Folgenden nicht nur der chronologische Ablauf einer Vorstellungsübung erläutert, sondern zusätzlich herausgestellt, welche Funktionen und Tätigkeiten die Lehrperson und die Klasse übernehmen (nach [Weber 1998]).

Phase der Vorstellungen

Jede Vorstellungsübung wird durch die Lehrperson angeleitet. Sie eröffnet die Übung, indem sie die Schülerinnen und Schüler bittet, alle Gegenstände beiseite zu legen, sich bequem hinzusetzen und – wenn möglich – die Augen zu schließen.[1]

Als Nächstes wird versucht, die Schülerinnen und Schüler in den Zustand entspannter Aufmerksamkeit zu versetzen. Dazu können als Vorspann zum Vorlesen des eigentlichen Texts der Vorstellungsübung folgende Sätze gesprochen werden:[2]

> „Bringe deinen Körper in eine bequeme Position, in der du dich gut entspannen kannst ... dann schließt du deine Augen. ... Achte auf deine Atmung ... verändere nichts an deiner Atmung, nimm einfach wahr, wie die Luft herein- und hinausgeht. ... Spüre deine Füße ... und beginne, sie zu entspannen. ... Lass diese Entspanntheit deine Beine hochwandern ... durch die Knie ... in die Hüften. ... Stell dir vor, dass die Entspannung den Bauchraum erfüllt ... Rücken ... Schultern. ... Lass deine Arme sich entspannen ... deine Hände. ... Spüre, wie sich dein Hals entspannt ... dein Gesicht. ... Genieße dieses entspannt-weiche Gefühl in

[1] Falls mit Störungen von außen (Klopfen an der Tür oder Klingeln) gerechnet werden muss, werden die Schülerinnen und Schüler prophylaktisch darauf aufmerksam gemacht und aufgefordert, sich gegebenenfalls möglichst nicht ablenken zu lassen, sondern sich weiter mit der Vorstellungsübung zu beschäftigen.

[2] Dieser Vorspann fällt mit zunehmender Gewöhnung einer Klasse an die Choreographie von Vorstellungsübungen erheblich kürzer aus. Die Pünktchen „...“ stehen nicht für eine Auslassung, sondern für eine Sprechpause.

> deinem Körper. Und nun können wir unsere Vorstellungsübung beginnen.“ (Nach [Fatzer 1998, S. 87 f.], Bearbeitung C. W.)[3]

Nach diesem Vorspann beginnt die Lehrperson, die Vorstellungsübung vorzutragen. Darin schildert sie eine mathematische Situation in Form von *Vorstellungsanweisungen*, welche die Schülerinnen und Schüler einzeln und direkt ansprechen (siehe die Texte in Abschnitt 2.2). Um den Faden nicht zu verlieren und sich nicht in Formulierungen zu verheddern, liegt der jeweilige Text schriftlich vorformuliert vor. Hier ist unter anderem bereits markiert, an welchen Stellen im Redefluss innegehalten werden muss, damit die Zuhörerinnen und Zuhörer möglichst gut folgen können.

Im Anschluss an das Vorlesen stellt die Lehrerin bzw. der Lehrer zwei Fragen, und zwar

- eine *mathematische* Frage sowie
- eine Frage nach den *Vorstellungen und Vorstellungsweisen* der Schülerinnen und Schüler.

Die Schülerinnen und Schüler haben zum Schluss dieser Phase zwei bis drei Minuten Zeit, sich mit den beiden Fragen für sich alleine gedanklich zu beschäftigen und sich so einem mathematischen Inhalt anzunähern. Zum Schluss dieser Phase werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, die Augen zu öffnen und dabei ihre Vorstellungen nicht zu vergessen.

In der ersten Phase kommt der Lehrperson eine doppelte Funktion zu. Sie ist nicht nur *Fachexpertin*, die einen mathematischen Inhalt pointiert in die Sprache von Vorstellungsanweisungen bringt und darbietet. Sie ist in besonderem Maße die *Moderatorin* von Vorstellungsprozessen, da sie die Schülerinnen und Schüler durch die Vorstellungsanweisungen anleitet und instruiert. Insbesondere versucht sie, mit ihrer Stimme durch entsprechende Modulation (Senkung der Stimmhöhe und Sprechgeschwindigkeit) eine konzentrierte Aufmerksamkeit zu erzeugen und in den richtigen Momenten Sprechpausen einzulegen. Damit ermöglicht sie den Schülerinnen und Schülern, ihre ‚innere

[3] Dieser Vorspann könnte dazu verführen, mathematische Vorstellungsübungen in die Nähe von *gelenkten Phantasiereisen* zu rücken. In der Tat stammt der Vorspann auch aus einer entsprechenden Anleitung zur Verwendung gelenkter Phantasien im Unterricht. Während es in Phantasiereisen aber primär um die Schaffung intensiver Erholungs- und Entspannungsphasen zur Unterstützung von Lernvorgängen geht, zielen Vorstellungsübungen auf fachliche Inhalte und Prozesse, wie in Kapitel 5 ausgeführt wird. Zur Charakterisierung von Phantasiereisen siehe [Fatzer 1998, S. 84–102] sowie [Peterßen 2001, S. 226–229], zu ihrem Einsatz im Mathematikunterricht [Jahnke-Klein 1997].

Bühne' zu öffnen, sich auf den Inhalt der Vorstellungsübung einzulassen und sich mit den beiden Fragen auseinanderzusetzen.

Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, dass sie eine gewisse Grundbereitschaft – ideal wäre Neugier – mitbringen, mathematische Inhalte in einer ungewohnten Form präsentiert zu bekommen. Die Schülerinnen und Schüler sind von Anfang an aufgefordert, den Vorstellungsanweisungen zu folgen und so den ‚Faden aufzunehmen'. Gänzlich auf sich alleine gestellt und ohne nachfragen zu können, konstruieren sie *eigene Vorstellungen*. Gegen Ende der Phase sind sie gehalten, sich in ihrer Vorstellung, das heißt ohne darstellende Hilfsmittel, mit einer vorgegebenen *mathematischen Frage* eigenständig auseinanderzusetzen.[4]

Von etwaigen äußeren Störungen sollte sich niemand ablenken lassen, jedenfalls nicht so sehr, dass der Faden verloren geht. Falls Schülerinnen und Schüler den Vorstellungsanweisungen nicht folgen wollen, können sie während der ersten Phase ihren eigenen Gedanken, die nicht mit der Vorstellungsübung in Zusammenhang stehen, nachgehen. Als Minimalforderung sind sie einzig gehalten, ihre Mitschülerinnen und -schüler nicht zu stören.

Phase der Besprechung

In der Regel ist das Mitteilungsbedürfnis der Klasse am Ende dieser ersten Phase unmittelbar vorhanden und so groß, dass sich die zweite Phase gewissermaßen von selbst ergibt. Die Schülerinnen und Schüler beschreiben ihre Erlebnisse und die beobachteten eigenen Vorstellungsweisen und teilen sie ihren Nachbarinnen oder Nachbarn im freien Gespräch mit. Ebenso interessieren sie sich für die Erlebnisse und Vorstellungen der anderen. Dafür ist die (in jeder Vorstellungsübung wiederkehrende) Frage nach den entstandenen Vorstellungen und Vorstellungsweisen verantwortlich. Auch die mathematische Frage führt zu hitzigen Diskussionen, es wird skizziert und argumentiert, Antwortversuche werden formuliert. Immer wieder vermischen sich Gespräche über eigene Vorstellungsweisen und über Antwortversuche. Manchmal wird auch die Lehrperson angesprochen, um Verständnisschwierigkeiten zu klären oder sich nach deren Erlebnissen zu erkundigen.

Nach einer Weile werden die freien Gespräche in Kleingruppen zum Klassengespräch. Je nach Vorstellungsübung werden die Antwortversuche sowie

[4] Dass die Aktivität des Vorstellens von außen noch weniger beobachtet werden kann als etwa die schriftliche Einzelarbeit, kann gewisse Befürchtungen wecken. So könnte mathematischen Vorstellungsübungen nur ein Erholungswert unterstellt werden. Wie aber aus Kapitel 5 (S. 133 ff.) hervorgehen wird, ist diese Befürchtung unberechtigt.

aufgetretene Vorstellungen von der Lehrperson gesammelt, gruppiert und auf der Wandtafel festgehalten. Sie geht zu diesem Zeitpunkt auch auf die am Ende der ersten Phase gestellte fachliche Frage sowie auf zusätzliche aufgetretene Fachfragen aus Sicht der Mathematik ein, indem sie zum Beispiel graphische Darstellungen oder Modelle hinzuzieht.

Damit nimmt die Lehrperson in der zweiten Phase eine weitaus weniger zentrale Stellung ein als in der vorangehenden. Die Phase der Besprechung erfordert geradezu eine *gewisse Zurückhaltung* der Lehrperson. Sie soll Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler nebeneinander stehenlassen und nicht gleich kommentieren oder werten, schon gar nicht aus fachlicher Sicht. Falls die Lehrperson den Gesprächen unter den Schülerinnen und Schülern zuhört, kann sie umgekehrt etwas über deren mathematische Vorstellungen und Herangehensweisen erfahren. Ganz am Ende dieser Phase kann sie das Klassengespräch moderieren und auch ihr eigenes mathematisches Fachwissen einbringen.

In der Phase der Besprechung tritt die *Aktivität der Schülerinnen und Schüler* sehr viel sichtbarer zutage als in der ersten Phase. Indem sie ihre Erlebnisse und Vorstellungsweisen versprachlichen, werden diese zum Gegenstand von Gesprächen. Da die Erlebnisse und Vorstellungsweisen aber im Kontext eines mathematischen Inhalts stehen, wird auch die mathematische Frage zum Gesprächsgegenstand. Dadurch erfahren sie nicht nur etwas über eigene Vorstellungen und Herangehensweisen an Mathematik, sondern auch über die ihrer Mitschülerinnen und -schüler. Das kann neue, Mathematik und Vorstellungen betreffende Fragen aufwerfen.

Wenn Schülerinnen und Schüler miteinander über ihre Vorstellungen diskutieren, ist ein besonders respektvoller Umgang mit den Aussagen anderer geboten. Als Minimalforderung in dieser Phase gilt für alle, den Gesprächen ihrer Mitschülerinnen und -schüler zuzuhören.[5]

2.1.2 Eingliederung in den Unterricht

In diesem Abschnitt gehe ich dem Kontext nach, in dem Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht eingesetzt wurden. Wie werden mathematische Vorstellungsübungen organisiert? Wie werden sie inhaltlich in den Mathematikunterricht eingebettet?

[5] Mehr dazu in Abschnitt 6.2.2 (S. 223 ff.).

Organisatorische Eingliederung

In der bisherigen Unterrichtspraxis finden Vorstellungsübungen im gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II statt. Damit richten sie sich – und das muss bei allen Aussagen und Überlegungen der ganzen Arbeit mitgedacht werden – an Schülerinnen und Schüler, die zwischen 16 und 20 Jahre alt sind. Vorstellungsübungen werden durchschnittlich etwa alle ein bis zwei Wochen zu Beginn einer Schulstunde durchgeführt. Um eine neue Klasse möglichst leicht daran zu gewöhnen, handelt es sich immer um die gleiche Schulstunde am gleichen Wochentag. Auch zeitlich ungünstig gelegene Lektionen (zum Beispiel die siebte Schulstunde des Tages oder die Schulstunde nach zwei Stunden Sport) eignen sich durchaus. Gerade in solchen Schulstunden, wo die Schülerinnen und Schüler geistig oder körperlich Ermüdungserscheinungen zeigen, dienen Vorstellungsübungen als Einstiegshilfe in den Mathematikunterricht. Je nach Länge und Komplexität des Texts einer Vorstellungsübung dauern beide Phasen zwischen zehn Minuten und einer halben Schulstunde. Da damit – bei insgesamt drei bis vier Wochenstunden – ein nicht unbeträchtlicher Teil der Unterrichtszeit mit Vorstellungsübungen zugebracht wird, werden die Schülerinnen und Schüler mindestens einmal pro Semester gefragt, ob und in welchem Rhythmus Vorstellungsübungen weiterhin durchgeführt werden sollen.[6]

In der bisherigen Unterrichtspraxis wissen die Schülerinnen und Schüler, dass ihre in Vorstellungsübungen gewonnenen Erkenntnisse und durch Vorstellungsübungen thematisierten mathematischen Inhalte nicht in schriftlichen Arbeiten geprüft werden. Durch den ausgeklammerten Bewertungsdruck wird für die Schülerinnen und Schüler glaubhaft unterstrichen, dass Vorstellungsübungen eher eine *Lerngelegenheit* als ein weiterer Anlass zur Überprüfung von Leistungen darstellen. Nur so kann es im Unterricht gelingen, individuelle Vorstellungs- und Herangehensweisen zu thematisieren und damit letztlich eine Art und Weise des Praktizierens von Mathematik zu ermöglichen, die nicht nur nach der fachlichen Antwort schielt, welche von der Lehrperson stammt.[7]

---

[6] Zu den Erfahrungen mit Vorstellungsübungen siehe Kapitel 3 (S. 35 ff).

[7] Besonders kritisch wäre eine Benotung im Falle von Vorstellungsübungen, die nicht im Lehrplan verankerte Inhalte thematisieren. Wenn davon ausgegangen wird, dass der Lehrplan und die Noten den Zweck haben, der Gesellschaft (in Person der Lehrerin bzw. des Lehrers) gegenüber Rechenschaft abzulegen, wie sehr (Note) jemand in einem klar umrissenen Inhalt (Lehrplan) bewandert ist, dann sind Noten für Inhalte am Rand oder außerhalb des Lehrplans nicht zu rechtfertigen. – Für weitere Argumente siehe die entsprechende Fußnote auf S. 227.

Inhaltliche Eingliederung

Vorstellungsübungen thematisieren zentrale mathematische Inhalte und stehen in mehr oder weniger engem Bezug zum aktuellen Unterrichtsstoff, der durch den Lehrplan vorgegeben ist. Manchmal werden sie zur Einführung eines neuen Unterrichtsinhalts benutzt wie beispielsweise der Konvergenz geometrischer Reihen (siehe Abschnitt 2.2.5). Etwas häufiger greifen sie einen bereits behandelten mathematischen Sachverhalt auf, zum Beispiel die Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck (siehe 2.2.6), um diesen Sachverhalt für den folgenden Unterricht zu aktualisieren oder zu vertiefen. Manchmal wird eine mathematische Fragestellung thematisiert, die außerhalb des Lehrplans steht, wie etwa die Frage des „geschlossenen oder offenen Universums“ (in 2.2.8).

Ein Unterrichtsinstrument

Insgesamt dienen mathematische Vorstellungsübungen – also die in die Unterrichtsumgebung eingebetteten Texte – zwar zur Vermittlung von Unterrichtsinhalten und damit zur Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen, sie betreffen aber nur einen beschränkten zeitlichen und inhaltlichen Ausschnitt des Unterrichts. Folglich handelt es sich dabei weder um eine Unterrichtstechnik noch um eine Unterrichtsmethode.[8]

Mathematische Vorstellungsübungen werden deshalb in dieser Arbeit ein *Unterrichtsinstrument* genannt. Der Begriff des Unterrichtsinstruments erfasst unter anderem, dass Vorstellungsübungen den Mathematikunterricht nicht über mehrere Stunden bestreiten, sondern sich vielmehr als Ergänzung bereits bestehender Unterrichtsinstrumente wie Übungsblätter, Filmdemonstrationen und andere verstehen. Vorstellungsübungen sind auf das *Zusammenspiel* mit anderen Unterrichtsinstrumenten und -methoden angewiesen.[9]

---

[8] Frey unterscheidet Unterrichtsmethoden von Unterrichtstechniken aufgrund des Zeitraums, den sie in Anspruch nehmen. So nennt er über zwanzig „Unterrichtsmethoden“ (eine bis mehrere Lektionen) und über vierzig „Unterrichtstechniken“ (einige Minuten) [Frey & Frey-Eiling 2004, Kap. 14]. Allerdings spricht er dort von Methoden, wo Flechsig – auf den er sich bezieht – von „didaktischen Modellen“ spricht [Flechsig 1996]. Andere Autoren unterscheiden erst gar nicht zwischen Unterrichtsmethoden und -techniken und kommen auf über hundert „Methoden“ [Peterßen 2001]. Zur uneinheitlichen Verwendung des Methodenbegriffs in der Schulpädagogik und Didaktik siehe auch [Meyer 1996, S. 45].

[9] Der Begriff des Unterrichtsinstruments mag zwar technische Assoziationen wecken. Hier wird er jedoch eher mit einem musikalischen Instrument in Zusammenhang gebracht, welches im Orchester eingesetzt wird und dort *neben* anderen Instrumenten spielt. Es kann dabei den Solopart übernehmen oder andere Instrumente unterstützen oder auch über längere Passagen aussetzen.

2.2 Die Texte der Vorstellungsübungen

In dieser Arbeit können nicht alle sechzig und mehr Vorstellungsübungen, die im Laufe der Unterrichtspraxis entstanden sind, erläutert und analysiert werden. Deshalb beschränke ich mich exemplarisch auf einige wenige, die ich nach folgenden Gesichtspunkten ausgewählt habe:

1. Alle vorgelegten Vorstellungsübungen sind im Vorfeld der Arbeit *mehrfach* mit gymnasialen Klassen im Rahmen meines Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II *durchgeführt* worden.

2. Die Auswahl der vorgelegten Vorstellungsübungen ist möglichst *breit* und *exemplarisch*. So beinhalten die vorgelegten Vorstellungsübungen nicht nur zentrale mathematische Themen, sondern stammen aus unterschiedlichen mathematischen Themengebieten und umfassen unterschiedliche Stoffelemente. Obwohl geometrische Themen für Vorstellungsübungen besonders naheliegend sind, werden auch solche zu Themen aus der Arithmetik und Analysis vorgelegt und analysiert.

3. Die hier vorgelegten Vorstellungsübungen wurden von Schülerinnen und Schülern für „besonders interessant“ befunden.[10]

4. Unter den Vorstellungsübungen, die nach den drei ersten Kriterien in die engere Wahl kamen, wurde die endgültige Auswahl nach subjektiven Kriterien wie Gehalt und Originalität getroffen.

Entlang dieser Gesichtspunkte habe ich die Texte von acht Vorstellungsübungen ausgewählt. Sie sind das Textmaterial, das in dieser Arbeit geschildert und analysiert wird.

Typen von Vorstellungsübungen

Aus Sicht der Anforderungsstruktur lassen sich unter den Vorstellungsübungen unterschiedliche *Typen* ausmachen. Im Rahmen dieser Arbeit wird zwischen den Typen „Aufbau“, „Problemlösen“, „Begründung“ und „Paradoxon“ unterschieden, die wie folgt zu charakterisieren sind:[11]

[10] Siehe auch Fußnote auf S. 51 (Frage Nr. 22).

[11] Eine genauere Charakterisierung der vier Typen erfolgt im Analysekapitel 5.2 (S. 137 ff.). Wie jede Typisierung vereinfacht auch diese. Schon das Beispiel „Würfel schneiden“ (Abschnitt 2.2.2) zeigt, dass ein gedanklich aufgebautes Objekt auch die Möglichkeit zur Begründung eines verwandten Sachverhalts in sich tragen oder als Grundlage für die Formulierung eines Problems dienen kann.

Aufbau: In Vorstellungsübungen von diesem Typ werden die Schülerinnen und Schüler Schritt für Schritt angeleitet, einen Sach- und Handlungszusammenhang aufzubauen, um die nachfolgend gestellte mathematische Frage beantworten zu können. Im Text wird der gedankliche Aufbau eines mathematischen Objekts so detailliert beschrieben, dass sich die anschließende mathematische Frage dank der Aufbauanweisungen beantworten lässt. In diesen Vorstellungsübungen geht es ganz besonders um das *Verfügbarmachen* und das *Erkunden* von mathematischen Objekten.

Problemlösen: Auch Vorstellungsübungen vom Typ „Problemlösen" beschreiben einen Sach- und Handlungszusammenhang. Im Unterschied zum Typ „Aufbau" wird in ihnen ein mathematisches Problem formuliert, ohne dass in den Vorstellungsanweisungen schon eine Strategie zu dessen Lösung angelegt wäre. Mit anderen Worten wird hier eine offene Frage in einem konstituierten Zusammenhang gestellt. Das Eingangsbeispiel (S. 1), in dem es um *Vermuten* und *Experimentieren* geht, gehört zu diesem Typus.

Begründung: In Vorstellungsübungen vom Typ „Begründung" wird ein gedanklicher Prozess angeleitet, der zur plausiblen Begründung eines mathematischen Sachverhalts dient. Auch wenn dieser Sachverhalt den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt sein sollte, ist der Zusammenhang neu, in dem er präsentiert wird. Hier geht es nicht um den mathematischen Prozess des formallogischen Beweisens, es sollte sich vielmehr in den Vorstellenden ein Gefühl der *Plausibilität* konstituieren.

Paradoxon: Im Verlauf einer Vorstellungsübung von diesem Typ wird eine mathematische Situation beschrieben, die befremdet, weil sie der menschlichen Erfahrung fremd bzw. unzugänglich ist und damit dem ‚gesunden Menschenverstand' widerspricht.[12] Solche Vorstellungsübungen wollen der Anlass sein, über Alltagserfahrungen und mathematische Schulkenntnisse hinauszuführen und Fragen aufzuwerfen. Mathematische Begriffe und Verfahren sollen zum Gegenstand der *Reflexion* und Kenntnisse damit *erweitert* werden.

Wie in Tabelle 2.1 dargestellt, dient diese Typisierung zur *Gruppierung* und *Reihung* der acht Vorstellungsübungen.

[12] Derartige Vorstellungsübungen sind also nicht im *logischen* Sinne widersprüchlich.

Typ	Vorstellungsübung
Aufbau	· Ikosaeder bauen · Würfel schneiden
Problemlösen	· Leiter rutschen · Collatzfolge
Begründung	· Reihe berechnen · Ebenes Dreieck begehen
Paradoxon	· Hilberts Hotel · Geschlossenes oder offenes Universum?

Tab. 2.1: Vier Typen von Vorstellungsübungen

Im Folgenden werden nun die Texte von Vorstellungsübungen zitiert, wie sie in der Phase der Vorstellungen vorgetragen werden. Ihre Gliederung in Unterpunkte deutet auf größere gedankliche Einheiten hin, die jeweils mit einer Sprechpause abgeschlossen werden. Die Einheiten bzw. Pausen sind durch Bezugs- („· “) bzw. Auslassungspunkte („...“) gekennzeichnet. Am Schluss jedes Texts werden die mathematische Frage und die – immer wiederkehrende – Frage nach den aufgebauten Vorstellungen zitiert.[13]

[13] Diese acht Texte werden in den Abschnitten 5.2.2 bis 5.2.5 ausführlich erläutert und analysiert (S. 152 ff.).

2.2.1 Ikosaeder bauen (Typ „Aufbau")

- *Betrachte ein ebenes regelmäßiges Sechseck aus Karton. ...*
- *Verbinde die einander gegenüberliegenden Eckpunkte mit einem Stift, so dass das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke gegliedert wird. ...*
- *Ritze die Kanten der sechs Dreiecke mit einer Nadel nach. Schneide eines der Dreiecke heraus und lege es beiseite. ...*
- *Betrachte die übrig gebliebene Figur aus fünf Dreiecken und verklebe die durch das Schneiden neu entstandenen beiden Kanten miteinander. Dabei* wölbt *sich die Figur zwangsläufig zu einer Art ‚Schale' auf, gebildet durch fünf gleichseitige Dreiecke. ...*
- *An die fünf freistehenden Kanten dieser Schale klebe je ein identisches gleichseitiges Dreieck an: Die Schale ist nun mit einem* Kranz *von fünf ‚Zacken'* versehen. *...*
- *Baue nochmals eine genau gleiche, zweite Schale mit Zackenkranz. ...*
- *Lege die eine Schale wie einen Deckel auf die andere, und zwar mit einem gewissen Abstand, so dass sich die beiden Zackenkränze ineinander verzahnen. Verklebe jede Zacke der unteren Schale mit zwei Zacken der oberen Deckelschale. ...*
- *Was für ein Körper entsteht? Aus wie vielen Dreiecken, Kanten pro Ecke und Eckpunkten besteht er? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.2 Würfel schneiden (Typ „Aufbau")

- *Forme aus einem Klumpen Ton oder Plastilin einen Würfel von etwa zehn Zentimeter Kantenbreite und lege ihn vor dich auf den Tisch. ...*
- *Stelle den Würfel auf eine seiner* Ecken *und halte ihn mit der einen Hand fest. ...*
- *Räumlich gegenüber der Ecke, auf welcher der Würfel steht, befindet sich eine andere Würfelecke. Richte den Würfel mit der Hand so aus, dass diese*

gegenüberliegende Ecke *einigermaßen senkrecht über der ersten Ecke zu liegen kommt. ...*

- *Fasse diese oberste Ecke ins Auge: Von ihr laufen* drei *Würfelkanten nach unten weg. ...*
- *Führe nun mit der anderen Hand ein Messer parallel zur Tischoberfläche. Schneide mit einem ebenen Schnitt die oberste Würfelecke ab. Als Schnittfläche entsteht ... ein kleines Dreieck. ...*
- *Schneide noch* weitere, *dünne Scheibchen vom Würfel weg. ...*
- *Von welcher Form sind ihre Schnittflächen? Von welcher Form sind sie, wenn immer weiter, über die Würfel-Ecken hinaus, Scheibchen weggeschnitten werden? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.3 Leiter rutschen (Typ „Problemlösen")

- *Stell dir eine Leiter in einem hellen, geräumigen Zimmer vor. ...*
- *Nimm die Leiter und lehne sie dicht an die Wand an. ...*
- *Stell dich selbst vor die* linke *Seite der Leiter hin und lehne dich mit deiner linken Schulter an die Wand. So siehst du von der Leiter nur noch den linken Holm vor dir, wie er nach links an die Zimmerwand angelehnt ist. ...*
- *In der Mitte des dir zugewandten Leiterholms ist eine* Lampe *angebracht. Verdunkle das Zimmer und schalte die Lampe ein. Du siehst sie leuchten, als Leuchtpunkt. ...*
- *Das untere Leiterende beginnt, auf dem Boden zu* rutschen, *ganz langsam nach rechts, von der Wand weg. Das obere Leiterende berührt dabei weiter die Wand und gleitet an ihr entlang hinunter. Im Moment, da es den Boden berührt, rutscht die Leiter nicht weiter, sondern bleibt liegen. ...*
- *Welche Leuchtkurve beschreibt bei dieser Bewegung die in der Holmmitte befestigte Lampe im dunklen Zimmer? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.4 Collatzfolge (Typ „Problemlösen“)

- *Wähle eine beliebige natürliche Zahl zwischen* 10 *und* 26 *und schreibe sie vor deinem inneren Auge auf. ...*
- *Fahre nun folgendermaßen weiter: Ist die Zahl* gerade, *halbiere sie, und ist sie* ungerade, *verdreifache sie und zähle eins dazu. ...*
- *Schreibe dir die entstandene Zahl deutlich auf, und verfahre mit ihr wie mit deiner ursprünglich gewählten Zahl: Ist sie gerade, halbiere sie, und ist sie ungerade, verdreifache sie und zähle eins dazu. ...*
- *Fahre solange weiter, bis du eine* Gesetzmäßigkeit *entdeckst. ... Du kannst auch mit einer neuen Ausgangszahl starten. ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.5 Reihe berechnen (Typ „Begründung“)

- *Zeichne eine Strecke quer vor dich hin, sagen wir von einer Handbreit Länge. ...*
- *Teile die Strecke in drei* gleich lange *Abschnitte. Färbe den linken Abschnitt rot, den mittleren gar nicht und den rechten grün. ...*
- *Fasse nun das mittlere* ungefärbte *Drittel der Strecke ins Auge: Teile es wiederum in drei gleich lange Abschnitte und färbe auch hier den linken Abschnitt rot und den rechten grün. ... Damit hast du jetzt ein Neuntel der ganzen Strecke rot und ein Neuntel grün gefärbt. ...*
- *Verfahre immer so weiter, indem du den jeweils ungefärbten mittleren Abschnitt drittelst und die beiden äußeren Abschnitte färbst. ...*
- *Der wievielte Teil der ursprünglichen Strecke wird* ‚schließlich‘ *rot sein? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.6 Ebenes Dreieck begehen (Typ „Begründung“)

- *Stell dir vor, wie du auf einer Wiese gehst. Da siehst du vor dir drei Stoffstreifen liegen, die die Form eines* großen Dreiecks *bilden. Stell dich so mit deinen Füßen mitten auf einen Streifen, dass das Dreieck* vor *dir liegt, und strecke deine Arme seitwärts nach rechts und links aus: Sie liegen* über *einem Streifen – das heißt einer Kante – des Dreiecks. ...*
- *Bewege dich nun seitwärts, Fuß* neben *Fuß setzend, auf deinem Streifen in Richtung des rechten Arms, bis du an eine Ecke kommst, wo zwei Stoffstreifen zusammenlaufen. ...*
- *Jetzt ragt der* rechte *Arm über die Figur hinaus, und der* linke *liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks. Dreh dich langsam, mit starr ausgestreckten Armen, um deine Längsachse so, dass dieser linke Arm zuerst* in *die Figur hineinzeigt, so lange, bis er* über *dem nächsten Stoffstreifen des Dreiecks zu liegen kommt. ...*
- *In die Richtung dieses Arms bewegst du dich wieder, Fuß* neben *Fuß setzend, bis zur zweiten Ecke. Jetzt ragt der* linke *Arm über das Dreieck hinaus, und der* rechte *liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks. Dreh dich wieder langsam so, dass der rechte Arm zuerst in das Dreieck hineinzeigt, bis er* über *der nächsten Kante zu liegen kommt. ...*
- *Geh auf diese Art weiter, bis du an den Ausgangspunkt zurückkommst. ...*
- *Wie stehst du jetzt? ... Was ist passiert?*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.7 Hilberts Hotel (Typ „Paradoxon“)

- *Stell dir ein riesiges Hotel vor: Es hat* unendlich *viele Einzelzimmer, die mit den Zimmernummern* $1, 2, 3, \ldots$ *durchnummeriert sind. Stell dir weiter vor, du arbeitest als Nachtportier in diesem Hotel. ...*
- *Eines Nachts sind unendlich viele Gäste im Hotel einquartiert. Du stellst dich also auf eine ruhige Nacht ein und legst dich schlafen. ...*
- *Da erscheint ein Gast an der Hotelrezeption, weckt dich und verlangt ein Einzelzimmer. „Tut mir leid“, sagst du, „wir sind leider total ausgebucht.“*

- *„Das kann nicht sein“, sagt der Gast. „Sie haben doch* unendlich *viele Zimmer, also muss noch ein leeres für mich da sein!“*
- *„Tut mir wirklich sehr leid“, sagst du, „aber es sind schon unendlich viele Gäste einquartiert, also ist kein einziges Zimmer mehr frei.“*
- *Der Gast entgegnet hartnäckig: „Das glaube ich nicht. Ich möchte sofort die Hoteldirektorin sprechen!“*
- *Du holst also die Hoteldirektorin. Sie hört sich die Klage des neuen Gastes gelassen an und meint dann zu dir: „Dieses Problem lässt sich lösen – wir tauschen einfach ein bisschen die Zimmer: Du schickst den Gast von Nummer 1 nach Nummer 2, den Gast von Nummer 2 nach Nummer 3, den wieder nach Nummer 4 usw. – also jeder bisherige Gast zieht in das Zimmer mit der nächstfolgenden Zimmernummer. Auf diese Weise wird Zimmer 1 frei, und unser neuer Gast kann untergebracht werden.“ ...*
- *Gesagt, getan. Und da es sich um ein mathematisches Hotel handelt, geht alles blitzschnell und ohne Beschwerden von Gästen, die nachts geweckt werden und umziehen müssen. Zufrieden legst du dich wieder hin. ...*
- *Etwas später wirst du wieder geweckt: Ein Bus mit* hundert *Personen ist angekommen, die alle unbedingt ein Bett in einem Einzelzimmer möchten. Du bist ratlos und läufst wieder zur Hoteldirektorin. ...*
- *Die sagt: „Auch diese Gäste können untergebracht werden. Schicke dieses Mal den Gast von Nummer 1 nach Nummer 101, den von Nummer 2 nach Nummer 102 usw. – also jeder Gast wird hundert Zimmer weiter einquartiert.“ ...*
- *Und wieder sind in kürzester Zeit alle alten Gäste umgezogen und die Neuankömmlinge in den ersten hundert geräumten Zimmern untergebracht. ...*
- *Aber noch einmal wird deine Ruhe in dieser Nacht gestört. Denn wieder eine halbe Stunde später – es ist schon weit nach Mitternacht – strömt eine riesige, unüberschaubare Menschenmenge in die Empfangshalle des Hotels, und ihr Reiseleiter wünscht, dass du alle Reisende in Einzelzimmern unterbringst. ...*
- *Du fragst: „Wie viele Personen sind es denn?“ „Unendlich viele“, sagt der Reiseleiter. ...*
- *Was machst du als Portier? Wie kannst du diese unendlich vielen neuen Gäste im Hotel unterbringen? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

2.2.8 Geschlossenes oder offenes Universum? (Typ „Paradoxon“)

Diese Vorstellungsübung besteht als einzige aus mehreren Teilen. Jeder Teil wird von derselben mathematischen Frage abgeschlossen.

- *Stell dir vor, dass deine Welt diejenige einer* Geraden *ist. Du lebst – wie eine Raupe – auf einem sehr langen, straff gespannten Seil. Du hast auf deinem Seil nur wenig Bewegungsmöglichkeiten: Bewege dich auf dem Seil ein bisschen* vorwärts *und bewege dich ein bisschen* rückwärts. ...
- *Stell dir zusätzlich vor, dass das Seil* unendlich *lang ist. Beginne, dich in eine der beiden Richtungen zu bewegen, immer weiter – garantiert kommst du nie mehr zum Ausgangspunkt zurück. ...*
- *Stell dir jetzt vor, dass dein Seil nicht unendlich lang ist, sondern einfach sehr lang ist. Es schließt sich zu einem* riesigen Kreis. ...
- *Beginne, in eine der beiden Richtungen zu kriechen. Was passiert nun, wenn du lange genug in eine der beiden Richtungen kriechst? Kehrst du irgendwann einmal zum Ausgangspunkt zurück oder nicht? ...*

- *Stell dir nun vor, du bist ein Lebewesen, das in einer* Fläche *wohnt – ähnlich einem Schatten: Bewege dich in deiner flachen Welt zuerst ein paar Schritte vorwärts und ein paar Schritte rückwärts, dann ein paar Schritte nach links und ein paar Schritte nach rechts. ...*
- *Stell dir zusätzlich vor, dass deine Fläche* unbegrenzt *groß ist und aus einer unendlich großen* Ebene *besteht. ...*
- *Beginne, dich in deiner flachen Welt in eine feste Richtung geradeaus fortzubewegen, immer weiter, immer weiter – du kehrst gewiss nie mehr zum Ausgangspunkt zurück. ...*
- *Stell dir jetzt vor, dass deine Fläche zwar groß ist, sich aber zu einer* riesigen Kugel-Oberfläche *schließt. ...*
- *Bewege dich in eine* feste *Richtung deiner Kugeloberflächen-Welt fort, immer und immer weiter. Was passiert nun, wenn du dich lange genug weiterbewegst? Kehrst du irgendwann einmal zum Ausgangspunkt zurück oder nicht? ...*

- *Du und ich, wir leben in einem* Universum, *in dem wir uns nicht nur vorwärts bzw. rückwärts und unabhängig davon nach links bzw. rechts bewegen können, sondern* zusätzlich *nach oben bzw. unten. ...*
- *Üblicherweise gehen wir davon aus, dass unser Universum* unbegrenzt *groß ist: Stell dir vor, du startest mit einem Raumschiff von der Erde aus hinaus ins Weltall. Du fliegst immer* kerzengerade *von der Erde weg. Dann kommst du nie mehr zur Erde zurück. ...*
- *Jetzt stell dir zum Schluss vor, dass unser Universum* ‚geschlossen' *ist, so wie schon das zum Kreis gekrümmte Seil bzw. die zur Kugeloberfläche gebogene Fläche auch geschlossen war. ...*
- *Fliege nun ins Weltall hinaus, immer* kerzengerade *mit festem Kurs, immer weiter. Was passiert nun, wenn du lange genug weiterfliegst? Kann es sein, dass du irgendwann einmal zum Ausgangspunkt zurückkehrst oder nicht? ...*
- *Welche Vorstellungen hast du im Laufe der Vorstellungsübung aufgebaut?*

Teil II

Reflexion

3 Erfahrungen beim Unterrichtseinsatz

Nach der Beschreibung der Aktion mathematischer Vorstellungsübungen werden in diesem Kapitel eigene Beobachtungen und Erfahrungen beim Einsatz mathematischer Vorstellungsübungen geschildert. Sie werden durch die mit einem Feedback-Fragebogen erhobenen Einschätzungen einiger Klassen, die das Unterrichtsinstrument in ihrem Mathematikunterricht kennengelernt haben, ergänzt und differenziert. Die hier geschilderten positiven Erfahrungen haben mich unter anderem ermutigt, das Konzept der Vorstellungsübungen weiterzuentwickeln und zu verfolgen. Sie stellen eine *erste Reflexion* des Unterrichtsinstruments dar.

3.1 Eigene Beobachtungen und Erfahrungen

Meine ersten Versuche mit mathematischen Vorstellungsübungen überraschten mich positiv. So ließen sich die Schülerinnen und Schüler bereitwillig auf das neue Unterrichtsinstrument ein. So lautstark sie sich gerade noch unterhalten hatten oder so turbulent sie eben noch durch das Klassenzimmer gerannt waren, sie wurden unerwartet ruhig und konzentrierten sich rasch, sobald ich mit dem Vorspann begann. Ich hatte den Eindruck, dass viele Schülerinnen und Schüler den anschließenden Vorstellungsanweisungen aufmerksam folgten und während dieser Phase mit einer *Intensität* präsent waren, wie ich sie aus meinem üblichen Unterricht nicht kannte. Im Schulzimmer war einzig meine Stimme zu hören, die Zuhörerinnen und Zuhörer waren sehr gespannt.

Umso augen- und ohrenfälliger war die Lebendigkeit der Schülerinnen und Schüler in der Phase der Besprechung. Zum einen war ihr Mitteilungsbedürfnis groß, sprudelnd berichteten sie ihren Nachbarinnen und Nachbarn von Erlebnissen in der Phase der Vorstellungen, aber auch von ihren Schwierigkeiten. Die Sprache, die sie dazu gebrauchten, war vom fachlich-mathematischen Standpunkt aus zwar eher unpräzise und rang so manches Mal um treffende Begriffe. Durch die Vielfalt der Formulierungen und Wortschöpfungen kam aber gleichzeitig eine positive Betroffenheit und Kreativität zum Ausdruck, die mich überraschte. Zum anderen war ihre Offenheit für die Erlebnisse anderer mindestens ebenso groß. Sie erkundigten sich interessiert danach, was ihr Gegenüber sich vorgestellt hatte, und verglichen dies mit eigenen Erlebnissen. Unter Einbezug verschiedener, unmittelbar zugänglicher Medien (Papier, Stifte, Schere, Finger, Hände usw.) diskutierten sie die mathematische Frage und gingen ihren Vorstellungen nach. Dabei konnten die beiden Bereiche durcheinandergeraten und neue Fragen entstehen.

Der Übergang von der Vorstellungsübung zurück in den üblichen Mathematikunterricht verlief jeweils ohne große Schwierigkeiten. Dies fiel mir besonders dann angenehm auf, wenn die Schülerinnen und Schüler aus einer schwierigen Prüfungsstunde in einem anderen Fach oder aus dem Sportunterricht in meine Stunde gekommen waren. Nach einer Vorstellungsübung war die Klasse jeweils auf Mathematik eingestellt und machte sich zum Beispiel daran, Mathematik-Aufgaben zu bearbeiten.

Solche Beobachtungen und Erfahrungen ermutigten mich, die ersten Versuche fortzuführen und Vorstellungsübungen im Unterricht häufiger durchzuführen. Da aus der Klasse immer wieder der Wunsch kam, eine Vorstellungsübung machen zu dürfen, begann ich, mathematische Vorstellungsübungen regelmäßig einzusetzen.

Im Laufe des regelmäßigen Einsatzes passierte es schon mal, dass einzelne Schülerinnen und Schüler gegen Vorstellungsübungen opponierten. Äußerungen wie „Vorstellungsübungen nehmen mir Zeit weg!“ oder „Das hat doch nix mit Mathe zu tun!“ machten deutlich, dass sie keine Vorstellungsübungen mehr wollten. Deshalb vergewisserte ich mich zumindest einmal pro Schulsemester, ob die weitere Durchführung von Vorstellungsübungen erwünscht sei oder nicht. Im Gespräch mit den Klassen wurde die weitere Durchführungshäufigkeit ausgehandelt. So gab es Klassen, in denen Vorstellungsübungen in gewissen Semestern nicht sehr oft oder gar nicht durchgeführt wurden. Über die ganze dreieinhalbjährige Schulzeit der Klassen variierte die Durchführungshäufigkeit meistens zwischen einmal wöchentlich bis einmal monatlich, womit in jeder Klasse durchschnittlich zwanzig mathematische Vorstellungsübungen pro Schuljahr durchgeführt wurden.

Durch den regelmäßigen Einsatz von Vorstellungsübungen gewann ich auch folgenden Eindruck. Mehrfach wurde ich bei der Besprechung von Vorstellungserlebnissen auf Schülerinnen aufmerksam, die sich am sonstigen Mathematikunterricht – soweit von außen beobachtbar – eher spärlich beteiligten. Nun, im Rahmen von Vorstellungsübungen, meldeten auch sie sich zu Wort, argumentierten und diskutierten. Ihnen schien die Umgebung der Vorstellungsübungen spürbar zustatten zu kommen.

Umgekehrt fiel mir auf, dass es eher Schüler waren, die während der ersten Vorstellungsübungen kaum mitdiskutierten. Allerdings verfolgten diese zurückhaltenden Schüler das Klassengespräch über Vorstellungen aufmerksam. Meistens fühlten sie sich sogar ermutigt, auszuprobieren, ob Vorstellungen, die für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler produktiv waren, auch für sie selbst produktiv waren. Damit begannen sie, sich für ihre eigenen Vorstellungsprozesse zu interessieren – und nahmen an den folgenden Vorstellungsübungen oft aktiv teil. Nur vereinzelt lehnte ein Schüler oder eine Schülerin das Unterrichtsinstrument auch noch nach längerer Zeit ab und beteiligte sich nicht an Vorstellungsübungen.[1]

Diese Erfahrungen und Beobachtungen entstanden im Mathematikunterricht mit meinen gymnasialen Klassen der Sekundarstufe II. Sie beziehen sich insbesondere auch auf den mehrjährigen Einsatz innerhalb der einzelnen Klassen, da sich keine Abnutzungs- oder Ermüdungserscheinungen feststellen ließen.[2]

Gleichzeitig unterrichtete ich auch Klassen der Diplommittelschule in Mathematik. In diesen Klassen war die Bereitschaft, sich auf mathematische Inhalte in der ungewohnten Form von Vorstellungsübungen einzulassen, kaum vorhanden, im Gegenteil. Dieselben Vorstellungsübungen, die in gymnasialen Klassen zu den beschriebenen Reaktionen führten, vermochten die DMS-Schülerinnen und -Schüler nicht zu begeistern, sondern schienen vielmehr jenseits ihrer Grenzen angesiedelt zu sein und sie folglich zu verunsichern. Viele Personen bekundeten Mühe, sich einen Inhalt ohne reale Stützen (Modelle, Darstellungen) vorzustellen und diese Vorstellung willentlich zu manipulieren. Die Klassen baten mich, Vorstellungsübungen weniger oft einzusetzen und die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit ausschließlich zur Bearbeitung des Lehrplan-Stoffs zu nutzen. Da auch die seltenere Durchführung nicht vermochte, die DMS-Klassen für mathematische Vorstellungsübungen zu interessieren, setzte ich das Unterrichtsinstrument in diesen Klassen nicht mehr oder nur mehr in Randstunden ein, beispielsweise vor den Ferien.[3]

[1] Jahnke-Klein beschreibt Ähnliches für Phantasiereisen. [Jahnke-Klein 1997, S. 18]

[2] Zum Zeitpunkt meiner Unterrichtstätigkeit schloss das Gymnasium an die progymnasiale Abteilung der Sekundarschule I an und dauerte dreieinhalb Jahre. Die Schülerinnen und Schüler konnten zwischen fünf Maturitätstypen wählen: Typus A (Latein und Griechisch), Typus B (Latein und die dritte Landessprache oder Englisch), Typus C (Mathematik und Naturwissenschaften), Typus D (neusprachliche Ausrichtung) und Typus E (Wirtschaftswissenschaften). [EDK 2001, S. 76, 83 ff.]

[3] Die Diplommittelschule DMS (heute Fachmittelschule genannt) schließt an die allgemeine Abteilung der Sekundarschule I an und dauert drei Jahre. Sie bereitet auf das Studium an einer Fachhochschule (in der Regel im Bereich der Primarlehrerausbildung, des Gesundheits- oder Sozialwesens, der Verwaltung oder der Kunst) vor. [EDK 2001, S. 89]

So machte ich mit dem Unterrichtsinstrument unterschiedliche Erfahrungen. Ergänzend zur eigenen – möglicherweise voreingenommenen – Sicht wird im nächsten Abschnitt die Sicht einiger meiner gymnasialen Klassen auf das neue Unterrichtsinstrument dargestellt. In einem Fragebogen beurteilten sie verschiedene Aussagen und beantworteten dazu auch offene Fragen. Im Text des Fragebogens kommt nicht nur mein damaliges Erkenntnisinteresse zum Ausdruck, sondern er spiegelt – besonders in den zu beurteilenden Aussagen – auch einige meiner damaligen Erwartungen samt Befürchtungen wider.

3.2 Befragung einiger Klassen

Die Akzeptanz eines Unterrichtsinstruments ist eine Grundvoraussetzung für erfolgreiches Lernen. Je höher die Akzeptanz der äußeren, den Unterricht konstituierenden Elemente (Unterrichtsfach, -methoden, -instrumente, -inhalte und -personen) ist, desto eher können Lernende Motivation und fachliches Interesse entwickeln. Damit vergrößern sich auch die Chancen, sich produktiv und erfolgreich mit Lerninhalten auseinanderzusetzen.

Weil mit mathematischen Vorstellungsübungen ein neues Unterrichtsinstrument implementiert wurde, lag es nahe, von den Schülerinnen und Schülern ein *Feedback* einzuholen, das heißt Vorstellungsübungen beurteilen zu lassen und Änderungswünsche zu erfahren. Dazu wurden Schülerinnen und Schüler einiger Klassen, die Vorstellungsübungen über längere Zeit kennengelernt hatten, mittels eines Fragebogens nach verschiedenen Aspekten von Vorstellungsübungen befragt, implizit unter anderem nach ihrer Akzeptanz. Im Folgenden wird der Akzeptanzbegriff auf das Unterrichtsinstrument zugeschnitten, um die Befragung dann unter dieser spezifischen Perspektive vorzustellen und auszuwerten. Es muss festgehalten werden, dass diese Perspektive erst im Rahmen der vorliegenden Arbeit und nicht schon bei der Planung und Durchführung der Befragung eingenommen wurde.

3.2.1 Forschungsfragen zur Akzeptanz

Die *Akzeptanzforschung* ist ein Forschungsansatz im Rahmen der angewandten Sozialforschung. Sie hat im deutschsprachigen Raum Ende der siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts im Rahmen der Einführung von Neuerungen (Computer und Unternehmensführung) in Büro und Verwaltung ihren Anfang genommen und untersuchte die Akzeptanz solcher Innovationen bei den Angestellten. In der Folge wurde Akzeptanzforschung auch für soziologische Fragestellungen wie das Zustandekommen des gesellschaftlichen Konsenses, etwa von Abstimmungsergebnissen oder Normen, entwickelt.[4]

Dabei werden zwei Kategorien von Akzeptanz unterschieden: Die *Einstellungsakzeptanz* wird der *Verhaltens-* bzw. *Nutzungsakzeptanz* gegenübergestellt.[5]

Einstellungsakzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen

Da Akzeptanz als Ausprägung einer allgemeinen Einstellung verstanden wird, ist Akzeptanzforschung immer auch Einstellungsforschung. So wird die Akzeptanz einer Innovation an positiven Einstellungen dieser Innovation gegenüber festgemacht und von *Einstellungsakzeptanz* gesprochen.[6]

Bei der Einstellungsakzeptanz eines neuen Unterrichtsinstruments wie mathematischen Vorstellungsübungen geht es um dessen *Bewertung*. Die zustimmende oder ablehnende Bewertung drückt sich in entsprechenden Meinungen und Haltungen aus, so kann das Unterrichtsinstrument auf Interesse stoßen oder Langeweile erzeugen, ein Einlassen auf das Unterrichtsinstrument als lohnenswert oder als Vergeuden der Unterrichtszeit erscheinen. [Müller-Böling & Müller 1986, S. 26 f.]

Um solche wertenden, allgemeinen Einschätzungen von Vorstellungsübungen geht es in der ersten Forschungsfrage (S. 10), die nun spezifiziert wird:

(F1a) Wie groß war die Einstellungsakzeptanz der befragten Schülerinnen und Schüler gegenüber mathematischen Vorstellungsübungen und wie sah sie aus?

Da Einstellungen grundsätzlich nicht von außen beobachtet werden können, müssen sie von den Lernenden erfragt werden. *Hohe Einstellungsakzeptanz* von Vorstellungsübungen wird damit an Meinungen und Haltungen festgemacht, die ihre positive Bewertung zum Ausdruck bringen. Entsprechend deuten negative Bewertungen auf eine *geringe Einstellungsakzeptanz* hin.

[4] Für eine detaillierte Bestandsaufnahme zur Akzeptanzforschung siehe [Lucke 1995, S. 233 ff.], für eine Ideengeschichte der Akzeptanz siehe [Lucke & Hasse 1998, S. 17–20] und für eine Begriffsbestimmung [Lucke 1995, S. 31–108]. Für einen Überblick über den Akzeptanzbegriff im gesellschaftlich-sozialen sowie betriebswirtschaftlichen Kontext schließlich siehe [Kollmann 1998, S. 38–53].

[5] Nach [Bürg & Mandl 2004, S. 5] geht die Unterscheidung zwischen Einstellungs- und Verhaltensakzeptanz auf [Müller-Böling & Müller 1986] zurück.

[6] Die Sozialpsychologie, die den Einfluss von Menschen auf das Denken, Fühlen und Handeln anderer Menschen untersucht, versteht unter einer *Einstellung* eine „Bewertung von Menschen, Objekten oder Ideen“. Sie unterscheidet weiter zwischen affektiv basierten, kognitiv basierten sowie verhaltensbasierten Einstellungen. [Aronson et al. 2004, S. 230 ff.]

Nutzungsakzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen

Menschen handeln nicht ausschließlich auf der Grundlage von Bedeutungen, die sie Sachverhalten zuschreiben. So wird in verhaltenspsychologischen Studien immer wieder festgestellt, dass aus bestimmten Einstellungen nur beschränkt entsprechende Verhaltensweisen und Handlungen folgen – meinen und handeln sind verschiedene Dinge.[7]

Aus diesem Grund macht die Akzeptanzforschung Akzeptanz nicht nur an Einstellungen und Bewertungen fest, sondern berücksichtigt zusätzlich das Verhalten. Sie spricht von *Verhaltensakzeptanz* und erfasst damit solche Aspekte der Akzeptanz, die sich im tatsächlichen und deshalb *beobachtbaren Verhalten* niederschlagen [Müller-Böling & Müller 1986, S. 27 f.]. Bei einer technischen Innovation wird sie mit der Intensität und Häufigkeit ihrer Nutzung gleichgesetzt: Wird die Innovation genutzt? Wie oft? Auf welche Weise? Deshalb sprechen Autoren, die weniger an der politisch-gesellschaftlichen als an der ökonomischen Akzeptanz einer Innovation interessiert sind, häufiger von *Nutzungsakzeptanz*. [Kollmann 1998, S. 102–106]

Bei neuen Unterrichtsinstrumenten ist die Nutzungsakzeptanz nicht so einfach durch Beobachtung zu eruieren wie bei neuen technischen Produkten oder elektronischen Medien. Die Wahl der Methoden, aber auch der Inhalte und Organisation des Unterrichts liegt traditionell im Aufgabenbereich der Lehrperson. Im Unterschied zur Entscheidung, ein Produkt zu kaufen oder einzusetzen, können die Lernenden die Wahl eines Unterrichtsinstruments oder gar einer Unterrichtsmethode nicht beeinflussen. Bei den Vorstellungsübungen kommt erschwerend hinzu, dass die befragten Schülerinnen und Schüler längst in alle Winde zerstreut sind. Damit lässt sich ihre Nutzung von Vorstellungsübungen zum jetzigen Zeitpunkt nicht mehr erheben.[8]

Deshalb modifiziere ich die Kategorie der Nutzungsakzeptanz für die gegebene Situation. Er wird zum einen im Hinblick auf die *Wirkungen*, zum anderen im Hinblick auf die *Durchführung* von mathematischen Vorstellungsübungen spezifiziert.[9]

[7] So unterrichten viele Mathematiklehrkräfte selbst dann instruktionistisch, wenn sie sich einem konstruktivistischen Unterrichtsverständnis verpflichtet sehen [Hess 2003]. Für einen Überblick über Bedingungen, unter denen das Verhalten anhand von Einstellungen ‚vorhergesagt' werden kann, siehe [Aronson et al. 2004, S. 252–256].

[8] Zur Bestimmung der Nutzung ließen sich etwa schriftliche Dokumente der Schülerinnen und Schüler zu ihren Vorstellungen heranziehen. Wie die Unterrichtsumgebung entsprechend ausgebaut werden kann, wird in Abschnitt 6.3.1 entwickelt (S. 225 ff.).

[9] Auf die hier geäußerten Annahmen wird bei der Diskussion der Bedeutung von Schülerbefragungen eingegangen, siehe 3.2.2.1.

- Gymnasiastinnen und Gymnasiasten mit mehrjähriger Schulerfahrung können einschätzen, wie sich ein neues Unterrichtsinstrument auf sie auswirkt, nicht nur im Vergleich mit den Wirkungen traditioneller Unterrichtsinstrumente. Wenn sich ein neues Unterrichtsinstrument ihres Erachtens positiv auswirkt, ist das eine Form positiver Nutzung. Damit lassen sich Aussagen über Wirkungen eines Unterrichtsinstruments als Aussagen über seine Nutzungsakzeptanz deuten. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb von *Wirkungsakzeptanz* die Rede sein.
- Als junge Erwachsene können Gymnasiastinnen und Gymnasiasten beurteilen, ob ein Unterrichtsinstrument weiterhin angeboten werden soll oder nicht. Ebenso können sie einschätzen, ob sie Unterrichtsangebote nutzen, wie sie deren Durchführung wünschen oder ob sie sich ihnen entziehen. Dieser Aspekt von Akzeptanz ist im Weiteren mit der Kategorie der *Durchführungsakzeptanz* gemeint.

Für eine schematische Darstellung aller genannten Kategorien der Akzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen siehe Abbildung 3.1.

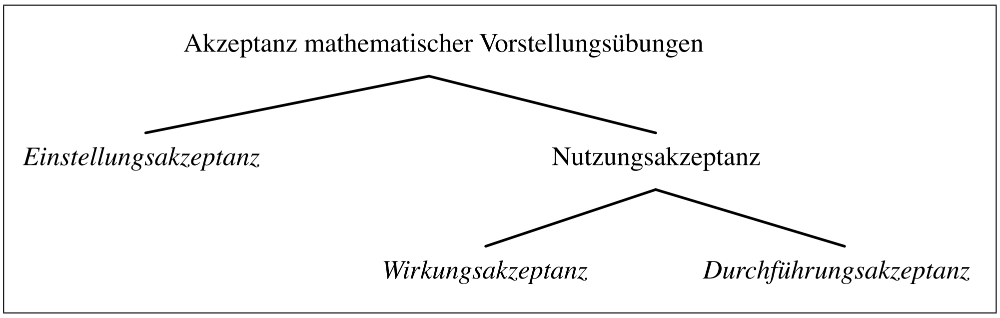

Abb. 3.1: Kategorien der Akzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen

Mit der vorgenommenen Spezifizierung kann die Nutzungsakzeptanz im didaktischen Kontext deutlich weniger objektiv erfasst werden als die Nutzungsakzeptanz von technischen Innovationen. Ihre Erhebung stützt sich nicht so sehr auf Beobachtungen von außen als vielmehr – wie die der Einstellungsakzeptanz – auf die Selbsteinschätzung und Beurteilung der Befragten. In der vorliegenden Arbeit wird sie zum Beispiel mit folgenden Fragen erhoben: In welchen Bereichen beobachten die Schülerinnen und Schüler Wirkungen mathematischer Vorstellungsübungen? Was für Veränderungen bewirken Vorstellungsübungen? Und: Werden Vorstellungsübungen dazu benutzt, um eigenen, nichtmathematischen Gedanken nachzugehen? Sollen Vorstellungsübungen überhaupt durchgeführt werden?

Um derartige, auf die Kategorien der Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz bezogene Fragen geht es im zweiten Teil der ersten Forschungsfrage (S. 10):

(F1b) Wie groß war die Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz der befragten Schülerinnen und Schüler gegenüber mathematischen Vorstellungsübungen und wie sah sie aus?

Damit kann von *geringer Nutzungsakzeptanz* gesprochen werden, wenn Vorstellungsübungen verärgernde Wirkungen erzeugen, wenn sie zum Abschweifen in eigene Gedankenwelten genutzt werden oder unerwünscht sind. Entsprechend zeigen Wirkungen wie die Befassung mit dem Inhalt über die Vorstellungsübung hinaus, die anhaltende Erinnerung daran oder der Wunsch nach der Durchführung von Vorstellungsübungen eine *hohe Nutzungsakzeptanz* an.

Bevor die Befragung dargestellt und hinsichtlich der Akzeptanz des Unterrichtsinstruments ausgewertet wird, wird vorab auf den Zusammenhang von Mathematikunterricht und Geschlecht eingegangen.

Geschlechtstypische Akzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen

Studien zur mathematischen Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern bestätigen geschlechtstypische Unterschiede immer wieder:[10] *Die Schüler zeigen bessere Leistungen in Mathematik als die Schülerinnen.*[11] Das gilt gerade auch für die Schweizer Gymnasiastinnen und Gymnasiasten der Sekundarstufe II, denn in internationalen Vergleichsstudien der letzten Jahre wurden hier teilweise große geschlechtstypische Leistungsunterschiede festgestellt.[12]

Die Ursachen für diese Leistungsunterschiede werden sowohl in der Biologie (Genetik, Hirnphysiologie) als auch in der Sozialisation (Erwartungen in Elternhaus und Schule, Stereotypisierung von Mathematik als männliche

[10] In Anlehnung an Jahnke-Klein wird in dieser Arbeit das Adjektiv „geschlechtstypisch“ statt wie sonst üblich „geschlechtsspezifisch“ verwendet, um zu erfassen, dass es sich „bei allgemeinen Aussagen über Jungen und Mädchen immer nur um Mittelwerte handelt und das einzelne Individuum nicht unbedingt der jeweiligen Charakterisierung entspricht“ [Jahnke-Klein 2001, S. 1].

[11] Für eine Übersicht über hundert nordamerikanische Studien zu geschlechtstypischen Unterschieden in der Mathematikleistung siehe die metaanalytische Studie von [Hyde et al. 1990 a].

[12] Zu den Schweizer Ergebnissen in TIMSS 1995 siehe [Ramseier et al. 1999], für diejenigen in PISA 2000 siehe [Moser 2001] und [Coradi et al. 2003], und für die Ergebnisse in PISA 2003 siehe [Zahner Rossier 2005].

Domäne) gesucht.[13] Welcher Faktor wichtiger ist, ist Gegenstand wissenschaftlicher Diskussion und wird vor allem vom jeweiligen Forschungshintergrund bestimmt. Um geschlechtstypische Leistungsunterschiede zu erklären, konzentriert sich die pädagogische Forschung auf sozialisationsbedingte Faktoren, weil diese (im Gegensatz zu biologischen Faktoren) beeinflussbar sind.[14]

Neben externalen Faktoren (Rollenverständnis von Eltern und Lehrkräften, Peergroup-Effekten und der Gestaltung des Unterrichts) werden besonders auch internale Faktoren (Einstellungen wie das Interesse am Fach oder das Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit, aber auch räumlich-visuelle Fähigkeiten) untersucht.[15] So ist es aus pädagogischer und damit auch didaktischer Sicht sinnvoll, von einem hohen fachspezifischen Interesse auf eine besonders intensive Auseinandersetzung und deshalb auch auf gute Leistungen zu schließen. Auch quantitative Untersuchungen berichten von einem starken Zusammenhang zwischen Interesse am Fach und schulischen Leistungen.[16] Es erstaunt kaum, dass die Rolle des Geschlechts auch für den Zusammenhang von mathematischer Leistung und fach- bzw. leistungsbezogenen Einstellungen groß ist. Denn gerade für das Unterrichtsfach Mathematik ist relativ gut belegt, dass geschlechtstypische Unterschiede hinsichtlich fachbezogener Einstellungen bestehen. *Gymnasiastinnen bringen Mathematik nicht nur weniger Interesse, sondern auch eine bedeutend negativere Einstellung entgegen als Gymnasiasten.*[17]

---

[13] Für eine knappe Übersicht über diese Art von Begründungen siehe [Moser et al. 1997, S. 147], für deren ausführliche Beschreibung siehe [Beerman et al. 1992, S. 38–79].

[14] Gerade aus pädagogischer Sicht werden biologische Erklärungsansätze heftig kritisiert, siehe etwa [Keller 1998, S. 26 ff.] und [Jahnke-Klein 2001, S. 13 f.]. Beiträge, die sich besonders (sozial)psychologischen und sozialisationsbedingten Gründen widmen, finden sich in [Kasten 2001, S. 214] oder [Coradi et al. 2003, S. 6].

[15] Siehe dazu [Coradi et al. 2003, S. 6, 23 ff.] sowie [Moser et al. 1997, S. 148].

[16] Für eine kurze Übersicht über unterrichtsbezogene Interesseforschung siehe [Helmke & Weinert 1997, S. 114 f.] und [Krapp 2001]. Inwiefern Interesse sowohl Voraussetzung als auch Folge mathematischer Bildung und damit pädagogisch und didaktisch bedeutsam ist, wird in [Bauer 1988, S. 170 ff.] und [Bauer 1989] entwickelt. Für die Korrelation zwischen mathematikbezogenem Interesse und schulischen Leistungen siehe [Schiefele et al. 1993].

Neuere Interesse-Leistungsuntersuchungen legen nahe, dass Interesse besonders dann ein substanzieller Prädikator eines erfolgreichen schulmathematischen Wissenserwerbs ist, wenn die Lernenden Freiräume für selbstreguliertes Lernen und interessengesteuerte Schwerpunktsetzung erhalten [Köller et al. 2000, S. 163]. Gerade für den Mathematikunterricht scheint Interesse nicht nur eine bestimmte Disposition einer Person zu sein, sondern von sozialen Prozessen abzuhängen [Bikner-Ahsbahs 2005].

[17] Eine Metaanalyse von über sechzig nordamerikanischen Studien zu geschlechtstypischen Einstellungsunterschieden im Bereich der Mathematik findet sich in [Hyde et al. 1990 b]. Wie die internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA ergaben, bestehen für Schweizer Gymnasiastinnen und Gymnasiasten statistisch signifikante geschlechtstypische Unter-

Im Kontrast zu diesen allgemeinen Befunden steht die im Abschnitt 3.1 beschriebene eigene Beobachtung, dass es immer wieder Schülerinnen sind, die gerne und engagiert über ihre Vorstellungen diskutieren, die sie in Vorstellungsübungen aufgebaut haben, auch wenn sie sich am sonstigen Mathematikunterricht wenig zu beteiligen scheinen. Verglichen damit halten sich die Schüler, soweit beobachtbar, etwas zurück. Interessieren sich die Gymnasiastinnen eher für das Unterrichtsinstrument und akzeptieren sie es eher als die Gymnasiasten?

Dieser subjektive, aus Beobachtungen gewonnene Eindruck könnte natürlich trügen. Denn es ist bekannt, dass Lehrkräfte ihre Schülerinnen bestenfalls gleich wie ihre Schüler behandeln, auch wenn sie der Meinung sind, den Schülerinnen besonders günstige Lernbedingungen zu bieten. Lehrkräfte scheinen sich gemäß der „Drittel-Parität“ zu verhalten – *ein* Drittel ihrer Aufmerksamkeit gilt den Schülerinnen, *zwei* Drittel den Schülern.[18] Sobald sie von dieser Norm abweichen und den Schülerinnen mehr Aufmerksamkeit widmen, haben sowohl Lehrkräfte als auch Schülerinnen und Schüler das Gefühl, die Schülerinnen würden bevorzugt.[19] Könnte auch der subjektive Eindruck, Schülerinnen würden Vorstellungsübungen eher akzeptieren, durch eine Drittel-Paritäts-Regel entstanden sein? Oder akzeptieren Schülerinnen mathematische Vorstellungsübungen vielleicht einfach nicht weniger als ihre männlichen Mitschüler?

Es muss betont werden, dass es aus pädagogischen Gründen keineswegs wünschenswert ist, dass Vorstellungsübungen von einem Geschlecht besser akzeptiert werden als vom anderen. Es ist vielmehr zu hoffen, dass das Unterrichtsinstrument einen Unterricht ermöglicht, in dem das Geschlecht der Lernenden eine geringere Rolle für fachbezogene Einschätzungen und Leistungen spielt. Unter diesem Gesichtspunkt wird die erste Forschungsfrage zur Akzeptanz ein weiteres Mal spezifiziert (S. 10):

(F1c) Gab es bei der Einstellungs-, Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz mathematischer Vorstellungsübungen geschlechtstypische Unterschiede? Gab es Gemeinsamkeiten?

---

schiede nicht nur hinsichtlich ihrer mathematischen Leistungen, sondern ebenfalls hinsichtlich ihrer fachbezogenen Einstellungen ([Ramseier et al. 1999], [Coradi et al. 2003, S. 40] und [PISA 2003, S. 136, 173]).

[18] Die Aufmerksamkeit wird dabei operationalisiert durch die Häufigkeit des Ansprechens (um zu fragen, zu unterstützen, zu loben oder zu ermahnen), durch die gewidmete Zeit oder durch die Häufigkeit, mit der sich Lehrpersonen ihren Schülerinnen und Schülern mit ihrer Körpervorderseite zuwenden.

[19] Ausführliches bei [Spender 1984, S. 72 ff.] und [Kreienbaum & Metz-Göckl 1992, S. 40].

Zunächst interessiert, wie stark eine Gruppe (etwa die Schüler) das neue Unterrichtsinstrument akzeptiert im Vergleich zur anderen Gruppe (dann die Schülerinnen). Darüber hinaus geht es um die Art und Weise etwaiger Unterschiede.[20]

3.2.2 Fragebogen

Einigen Klassen habe ich einen *Fragebogen* vorgelegt, um ein Feedback zu bekommen, das heißt Meinungen über und Einschätzungen von Vorstellungsübungen zu erfahren, und um mit den Schülerinnen und Schülern darüber ins Gespräch zu kommen. Damit erhebt der Fragebogen Selbsteinschätzungen. Dazu einige Bemerkungen, bevor dann der Aufbau des Fragebogens erläutert wird.[21]

3.2.2.1 Bedeutung der Schülerbefragung

Altrichter beschreibt die Befragung von Schülerinnen und Schülern mittels Fragebogen im Rahmen der Aktionsforschung als eine mögliche Art der „Informationssammlung“ [Altrichter & Posch 1998, S. 156–162]. Nun geben Skeptikerinnen und Skeptiker solcher Schülerbefragungen zu bedenken, dass es sich bei den darin vorgenommenen Selbsteinschätzungen um Schönrederei handle und der Erkenntniswert deshalb gering sei. Solche Kritiken unterstellen Fragebogen wie dem vorliegenden mehr oder weniger explizit, dass sie bestenfalls erfassen, welche Wünsche die Befragten an einen Sachverhalt haben, und sprechen deshalb den Ergebnissen nur mäßige Bedeutung zu.

Solche Einwände wiegen umso schwerer, weil an dieser Stelle noch einmal das bereits diskutierte Problem meiner Doppelrolle als Lehrer und Forscher hineinspielt (siehe Kapitel 1). Das Unterrichtsinstrument „mathematische Vorstellungsübungen“ wurde von mir nicht nur konzipiert und implementiert, sondern die Befragung darüber wurde ebenfalls von mir durchgeführt. Damit

[20] Der Untersuchung von Geschlechterunterschieden kann entgegengehalten werden, sie trage durch den Fokus auf die Kategorie des sozialen Geschlechts „gender“ eher zu deren Festschreibung bei als zu deren Aufhebung. Ein Ausbruch aus dem Dualismus der Geschlechter scheint jedoch unmöglich – selbst sein Verschweigen diente nur dessen Konsolidierung. Durch seine Thematisierung sind aber Verschiebungen möglich, zum Beispiel die Auflösung eines hierarchischen Gefälles zwischen den Geschlechtern.

[21] Der Fragebogen liegt in zwei Versionen vor. Alle Aussagen dieser Arbeit beziehen sich – sofern nicht anders vermerkt – auf Version b). Sie ist aus Version a) durch kleine Modifikationen entstanden. Für die originalen Fragenbogen siehe Abschnitte A.1 und A.2 im Anhang (S. 253 f.), für den Einsatz der beiden Fragebogen siehe S. 52.

können die Schülerinnen und Schüler erst recht davon ausgehen, dass positive Antworten erwünscht sind. Folglich könnte es sein, dass mindestens einige von ihnen aufgrund ihres Abhängigkeitsverhältnisses den Fragebogen unter Berücksichtigung vermuteter Erwartungen und damit im Sinne sozialer Erwünschtheit beantworten – ihre Beurteilungen und Antworten könnten ‚schöngeredet' sein.

Umgekehrt halten Verfechterinnen und Verfechter von Schülerbefragungen wie der vorliegenden dagegen, Schülerinnen und Schüler seien als *kundige Laien* wahrzunehmen und einzubeziehen. Sie nennen pädagogische Argumente (Zurechtrücken eigener Beobachtungen, Ernstnehmen der Lernenden, Erziehung zur Kritikfähigkeit und Selbstverantwortung) und zitieren empirische Untersuchungen, in denen Schülerinnen und Schüler nachweislich in der Lage waren, ihren Unterricht (Methoden, Lehrkräfte) kritisch und differenziert zu beurteilen. Damit eignen sich Schülerbefragungen vor allem „als Werkzeug für die Unterrichtsentwicklung" [Helmke 2004, S. 167].[22]

Wie schon bei der Diskussion um die Wissenschaftlichkeit von Aktionsforschung, erlaubt der gegenwärtige Stand in der Frage des Werts von Selbsteinschätzungen keine abschließende und allgemeingültige Antwort. Selbsteinschätzungen sollten nicht leichthin verabsolutiert werden, sie haben jedoch gerade im Kontext von Unterrichtsentwicklung ihren pädagogischen Wert, wenn sie als solche gelesen und ihre Grenzen im Auge behalten werden. So sind Selbsteinschätzungen als individuelle und subjektive Äußerungen der befragten Schülerinnen und Schüler zu lesen.

Im Rahmen dieser Arbeit geht es denn auch nicht darum, die Schülerantworten als Nachweis für eine verallgemeinerbare Wirksamkeit von Vorstellungsübungen heranzuziehen. Sie werden vielmehr meinen eigenen Beobachtungen und Erfahrungen als Fremdeinschätzungen gegenübergestellt. Damit haben die Schülerantworten die Funktion, das Spektrum der Schülereinschätzungen aufzuzeigen und beurteilbar zu machen. Darüber hinaus werden sie in der Analyse und der Auslotung der Grenzen des Unterrichtsinstruments wieder aufgegriffen.[23]

[22] Helmke plädiert wie schon Fichten dafür, Schülerbefragungen zum Unterricht nicht nur als erziehungswissenschaftlichen Gegenstand, sondern gerade auch als Lehrkraft zu nutzen, da Lehrkräfte ihren Unterricht nur aus ihrer eigenen Perspektive und deshalb unzureichend beurteilen können. ([Helmke 2004, S. 156–175] und [Fichten 1993, S. 38–44])

[23] Ergänzend sei bemerkt, dass in vorliegender Befragung die Gefahr von Schönrederei etwas gemindert ist, da Gymnasiastinnen und Gymnasiasten damit rechnen müssen, dass ich bei allzu positiven Einschätzungen Vorstellungsübungen häufiger oder ausgedehnter einsetzen würde – ein Kontrolleffekt, der gerade in meiner Doppelrolle wurzelt.

3.2.2.2 Aufbau des Fragebogens

Der Fragebogen umfasst eine A4-Seite, um mit einem vertretbaren zeitlichen Aufwand ausgefüllt werden zu können. Er ist zweiteilig angelegt und enthält sowohl Behauptungen – so genannte *Ankreuz-Items* – als auch offene Fragen – *Antwort-Items* genannt.[24]

Die achtzehn vorformulierten Behauptungen drücken verschiedene auf das Unterrichtsinstrument bezogene Wertungen und Wirkungen – und damit meine Hoffnungen bzw. Befürchtungen – sowie Vorschläge zu Varianten der Durchführung aus. Zur Vermeidung von Positionseffekten sind die Items teils positiv („VÜ interessieren mich"), teils negativ („VÜ langweilen mich") formuliert.[25] Auf einer fünfstufigen Likert-Skala von „stimmt" über „weder – noch" bis „stimmt nicht" konnten die Befragten zu jedem Ankreuz-Item den Grad ihrer Zustimmung beziehungsweise Ablehnung angeben. Damit geht es im ersten Teil des Fragebogens um das *Maß* der Einstellungs- und Nutzungsakzeptanz.

In Ergänzung dazu ist der zweite Teil des Fragebogens angelegt, worin es um die *Art* der Akzeptanz geht. Dazu eignen sich offen gestellte Fragen besonders gut. Zum einen wird das Antwortverhalten der Befragten weniger gelenkt als bei der Beurteilung vorformulierter Behauptungen und es kann ein breites Spektrum an Antworten erwartet werden. Da bei der Beantwortung offener Fragen eigene Begriffe und ein individueller sprachlicher Stil verwendet werden können, kommt zum anderen die Authentizität der Antworten zum Ausdruck. Besonders für die Beantwortung der Forschungsfrage nach der geschlechtstypischen Akzeptanz kann von offen formulierten Fragen erwartet werden, qualitative Unterschiede sichtbar zu machen, die mit bloßen ‚Mehr-weniger'-Beurteilungen vorformulierter Behauptungen nicht erscheinen. Zudem ist zu erwarten, dass sich kritische Einzelstimmen vor allem in offenen Antworten äußern. Da sich die Antwort-Items ebenfalls auf Aspekte der Einstellungs- und Nutzungsakzeptanz beziehen, hängen sie mit den Ankreuz-Items zusammen.

Es wird davon ausgegangen, dass die Fragen des Fragebogens erfassen, wie meine gymnasialen Klassen mathematische Vorstellungsübungen in verschiedener Hinsicht akzeptieren. Jede nachfolgend diskutierte Behauptung bezie-

[24] Weil ich zum Zeitpunkt der Umfrage weder das theoretische Konstrukt der Einstellungs- und Nutzungsakzeptanz kannte noch explizite Forschungsfragen beantworten wollte, beansprucht der Fragebogen keinerlei testtheoretische Güte wie etwa die Konstruktvalidität zur Erhebung von Akzeptanz.

[25] Im Fragebogen steht „VÜ" abkürzend für „Vorstellungsübungen".

hungsweise Frage steht einerseits für sich selbst, andererseits versteht sie sich als ein Aspekt von Akzeptanz. So geht es in der Beurteilung der Aussage „Nach einer VÜ fühle ich mich motivierter (als davor)“ um die durch Vorstellungsübungen veränderte Motivationslage. Darüber hinaus wird eine etwaige motivierende Wirkung als spezifischer Ausdruck von Akzeptanz angesehen.

Deshalb werden nun die Items der Befragung, statt sie der Reihe nach zu erläutern, den drei Kategorien der Akzeptanz – der Einstellungs-, der Wirkungs- und der Durchführungsakzeptanz (Abb. 3.1, S. 41) – zugeordnet.

Items zur Einstellungsakzeptanz: In fünf Ankreuz-Items des Fragebogens geht es um Behauptungen, die Wertungen und Einstellungen im Zusammenhang mit der Akzeptanz von Vorstellungsübungen ausdrücken:

1. „VÜ wecken mein Interesse.“
2. „VÜ langweilen mich.“
12. „VÜ sprechen mich mehr an als der übliche Mathematik-Unterricht.“
14. „VÜ nehmen mir Zeit weg, in der ich lieber am eigentlichen Unterrichtsstoff arbeiten würde.“
18. „Pauschal: VÜ lohnen sich / mache ich gerne.“

Je zustimmender die Beurteilungen der Behauptungen Nr. 1, 12 und 18 ausfallen, desto höher ist die Einstellungsakzeptanz. Da die Behauptungen Nr. 2 und 14 im Gegensatz dazu negative Einstellungen ausdrücken, wird eine zustimmende Beurteilung als niedrige Einstellungsakzeptanz interpretiert.

Items zur Wirkungsakzeptanz: Die meisten Ankreuz-Items betreffen Einschätzungen zu Wirkungen und Folgen von Vorstellungsübungen und damit die Wirkungsakzeptanz:

3. „VÜ regen mich an.“
4. „VÜ verärgern mich.“

„Nach einer VÜ fühle ich mich ...

5. ... konzentrierter (als davor).“

6. ... motivierter (als davor).“
7. ... gefrusteter (als davor).“
8. ... verwirrt.“
9. „Durch VÜ erfahre ich Neues über Mathematik.“
11. „VÜ stellen Querverbindungen her.“
13. „Durch VÜ erfahre ich Neues über mich und meine Person.“

Während die anregende Wirkung in der Behauptung Nr. 3 nicht nur emotional, sondern auch kognitiv verstanden werden kann, betreffen Items Nr. 4 bis 7 ausschließlich emotional-motivationale Aspekte. Item Nr. 8 könnte theoretisch auch emotional aufgefasst werden, war aber kognitiv intendiert. Items Nr. 9, 11 und 13 betreffen Ziele des Mathematikunterrichts. Während Nr. 9 ein direktes Ziel jeglichen Fachunterrichts ist, ist in Item Nr. 13 ein genereller Auftrag von Bildung formuliert. Item Nr. 11 ist je nach Lesart ein spezifisches Ziel des Mathematik-Unterrichts (Bezüge zu verschiedenen mathematischen Gebieten und Themen herstellen) oder ein allgemeines Bildungsziel (Bezüge von Unterrichtsinhalten zu außermathematischen Themen wie Person oder Alltagswelt herstellen).

Je zustimmender die Beurteilungen der sechs positiv formulierten Behauptungen Nr. 3, 5, 6, 9, 11 und 13 ausfallen, desto höher die Wirkungsakzeptanz. Umgekehrt bedeutet eine zustimmende Beurteilung der Items 4, 7 und 8 eine niedrige Wirkungsakzeptanz.

Folgende zwei Antwort-Items werden ebenfalls der Wirkungsakzeptanz zugeordnet:

19. „Inwiefern regen Sie VÜ an bzw. verärgern Sie (kurzfristig)?“
20. „Was für Veränderungen können Sie an sich beobachten, die mit den VÜ zu tun haben könnten (langfristig)?“

In diesen Items geht es darum, kurz- und langfristige Wirkungen von Vorstellungsübungen auf die eigene Person einzuschätzen. Während die Beurteilungen der beiden Behauptungen Nr. 3 und 4 Aussagen über das Maß der Anregung bzw. Verärgerung ermöglichen, geben diese beiden Antwort-Items

Aufschluss über die Art und Weise der Anregung bzw. Verärgerung. Sie sollen es ermöglichen, die Wirkungen hinsichtlich ihrer zeitlichen Dauer zu differenzieren.

Items zur Durchführungsakzeptanz: In drei Ankreuz-Items des Fragebogens geht es sowohl um die Durchführung als auch um Änderungsvorschläge zur Durchführung und damit um die Durchführungsakzeptanz:

15. „Während einer VÜ gehe ich eigenen Gedanken und Bildern, die mich momentan beschäftigen und die nichts mit der VÜ zu tun haben, nach."
16. „Ich möchte mehr Zeit für VÜ und deren Besprechung haben."
17. „Ich möchte, dass VÜ mehr mit dem aktuell behandelten Unterrichtsstoff zu tun haben."

Und schließlich erfassen auch folgende Antwort-Items etwas von der Durchführungsakzeptanz:

21. „Was müsste an den VÜ für Sie geändert werden, damit VÜ Sie mehr ansprechen würden (thematisch / sprachlich / organisatorisch)?"
23. „Wollen Sie weiterhin VÜ machen? Wie oft?"

Bei genauerem Hinsehen betreffen die beiden Items Nr. 15 und 23 die *tatsächliche* Durchführung, während es in den drei Items Nr. 16, 17 und 21 um eine *veränderte* Durchführung geht:

- Das Ankreuz-Item Nr. 15 formuliert die Behauptung, dass das neue Unterrichtsinstrument und die zur Verfügung gestellte Zeit für eigene, fachfremde Zwecke genutzt wird. Eine Person, die dieser Behauptung zustimmt, entzieht sich der Durchführung, was als niedrige Durchführungsakzeptanz gedeutet werden muss. Die Antwort auf den ersten Teil der Doppelfrage Nr. 23 gibt Auskunft über die Bereitschaft, sich für Vorstellungsübungen im Rahmen des Unterrichts Zeit zu nehmen. In ihrer Antwort auf diese (einzige) Ja-Nein-Frage bekennen die Befragten Farbe zu ihrer Durchführungsakzeptanz: Bejahung drückt hohe, Verneinung niedrige Durchführungsakzeptanz aus. Die zweite Teilfrage nach der Häufigkeit der Durchführung präzisiert die erste Teilfrage. Je häufiger die genannte Durchführung, desto höher die Durchführungs- und damit Nutzungsakzeptanz.

- Die Items Nr. 16, 17 und 21 haben in einem etwas anderen Sinne mit Durchführungsakzeptanz zu tun. Die durchgeführten Vorstellungsübungen basieren auf einer Choreographie, die grundsätzlich veränderbar ist. In diesen Items geht es um Änderungsvorschläge zum Design der Vorstellungsübungen: Welche Durchführungsbedingungen müssen wie modifiziert werden, um eine höhere Akzeptanz zu erreichen? Dabei handelt es sich um eine hypothetische Akzeptanz, die irgendwann in der Zukunft bestehen könnte – im Unterschied zur aktuell bestehenden Durchführungsakzeptanz der beiden Items Nr. 15 und 23, in denen konkrete Aspekte der Durchführung formuliert sind. Dass die Umsetzung der Items Nr. 16 und 17 die Akzeptanz von Vorstellungsübungen erhöhen würde, ist möglich, aber keineswegs garantiert. Das Antwort-Item Nr. 21 fragt direkt nach Änderungsvorschlägen zur Erhöhung der Akzeptanz. Diese zukünftige Akzeptanz ist allerdings stark hypothetischer Natur, im Gegensatz zur aktuell bestehenden Akzeptanz aller anderen, bereits erläuterten Items.

Damit sind bis auf zwei Items alle Fragen des Fragebogens den drei Kategorien von Akzeptanz zugeordnet.[26]

[26] Da das hier verwendete Akzeptanzkonstrukt erst *nach* der Befragung entwickelt wurde, lassen sich erwartungsgemäß nicht alle Fragebogen-Items eindeutig einem der drei Aspekte von Akzeptanz zuordnen. So drückt die Behauptung „VÜ haben für mich nichts mit der Mathematik zu tun“ (Nr. 10) wohl eine bestimmte Einstellung zu Vorstellungsübungen aus, die jedoch eher mit dem Bild von Vorstellungsübungen (bzw. dem des erlebten Mathematikunterrichts) zu tun hat als mit Akzeptanz. Auch das Antwort-Item „An welche Vorstellungsübungen können Sie sich erinnern, die Sie besonders interessant fanden?“ (Nr. 22) kann nur schwerlich unter einer der Akzeptanz-Kategorien subsumiert werden. Die Frage gibt wohl Auskunft über Wirkungen von Vorstellungsübungen. Zum Zeitpunkt der Befragung sollte jedoch in Erfahrung gebracht werden, was Schülerinnen und Schülern nach vielen Vorstellungsübungen in aktiver Erinnerung geblieben ist. Zudem erlaubt dieses Item keine Vergleiche, da nicht alle Klassen dieselben Vorstellungsübungen erlebt haben. Deshalb werden die Ergebnisse der beiden Items Nr. 10 und 22 (außer als Hilfe für die Auswahl der Beispiele S. 22) im Rahmen dieser Untersuchung *nicht* weiter berücksichtigt. Der Vollständigkeit halber sind die entsprechenden Daten dennoch in allen Tabellen im Anhang aufgeführt.

3.2.2.3 Befragte Klassen

Ich habe die Befragung zu zwei verschiedenen Zeitpunkten in meinen eigenen Klassen an demselben Gymnasium durchgeführt, einmal in drei Klassen mit Fragebogen Version a) (im Folgenden *Befragung a)* genannt) und zwei Jahre später in zwei weiteren Klassen mit Fragebogen Version b) (*Befragung b)* genannt).[27]

Alle befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten standen am Ende der zehnten, elften oder zwölften Jahrgangsstufe. Das Durchschnittsalter aller Befragten lag bei 18 Jahren und 4 Monaten, wobei die jüngste Person etwas über 16 Jahre und die älteste Person etwas über 21 Jahre alt war.

Bei der Befragung a) wurden 60 Personen und bei der Befragung b) 39 Personen befragt. Von den insgesamt 99 befragten Personen waren 52 Gymnasiastinnen und 47 Gymnasiasten, wie die Tabelle 3.1 zeigt. Sie stammten

	Befragung a)		⟵	⟶ Befragung b)		
	GB 11	GB 12.1	GB 12.2	GB 10	GE 11	total
Anzahl m	$n = 11$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 10$	$n = 13$	$n = 47$
Anzahl w	$n = 12$	$n = 10$	$n = 14$	$n = 12$	$n = 4$	$n = 52$
total	$n = 23$	$n = 17$	$n = 20$	$n = 22$	$n = 17$	$n = 99$

Tab. 3.1: Anzahl der befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten

aus vier Klassen des Typus B und aus einer Klasse des Typus E. Schülerinnen und Schüler anderer Maturitätstypen wurden nicht befragt.[28]

Zum Zeitpunkt der Befragung waren in den befragten Klassen in einem Zeitraum von einem halben Jahr bis zu zwei Jahren zwischen zehn und vierzig Vorstellungsübungen durchgeführt worden, wie Tabelle 3.2 zeigt. Alle Klassen

[27] Die Befragung a) wurde 1997, die Befragung b) 1999 durchgeführt. Keine der in der zweiten Befragung befragten Personen hat bereits an der ersten Befragung teilgenommen. Für die entsprechenden Fragebogen siehe im Anhang die Abschnitte A.1 und A.2 (S. 253 f.).
[28] Zur Kodierung der Klassenbezeichnungen: Der Buchstabe „G" steht für die Schulstufe „Gymnasium", die Buchstaben „B" bzw. „E" geben den Maturitätstypus (Latein bzw. Wirtschaft) an, die Zahl steht für die Jahrgangsstufe. Da zwei Klassen „GB12" an der Befragung teilnehmen, wird zwischen „GB 12.1" und „GB 12.2" unterschieden.

	Befragung a)	⟵		⟶ Befragung b)	
	GB 11	GB 12.1	GB 12.2	GB 10	GE 11
Anzahl VÜ	10	10	40	17	22
Dauer [Jahre]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1	2

Tab. 3.2: Anzahl der durchgeführten Vorstellungsübungen

hatten also vor der Befragung die Möglichkeit gehabt, das Unterrichtsinstrument und dessen Choreographie *ausführlich* kennenzulernen.[29]

Die befragten Klassen wurden von mir in Mathematik nicht nur unterrichtet, sondern auch geprüft. Ihre Zeugnis-Noten zum Zeitpunkt der Befragung variierten zwischen 2–3 und 6, und die durchschnittliche Mathematiknote aller Befragten lag bei 4,27. Wie die Notenschnitte in Mathematik nach Klassen und Geschlecht aufgeteilt aussahen, zeigt Tabelle 3.3.[30]
In drei Klassen hatten die Schüler den besseren Notenschnitt, in den beiden anderen Klassen die Schülerinnen. Insgesamt wiesen die Schüler zwar einen leicht höheren Notenschnitt auf als die Schülerinnen, ihre Noten streuten auch stärker. Im Großen und Ganzen handelte es sich bei den Befragten also um Schülerinnen und Schüler mit *durchschnittlichen Mathematikleistungen.*

3.2.2.4 Vorgehen zur Auswertung der Ankreuz-Items

Die abgegebenen Beurteilungen der Behauptungen werden kodiert und deskriptiv-statistisch ausgewertet, um in den mit jeder einzelnen Behauptung erhobenen Daten allgemeine Strukturen und Tendenzen herauszuarbeiten.

[29] Die angegebene Anzahl an Vorstellungsübungen versteht sich als auf die Klasse als Ganzes bezogener *Höchstwert*. Dass eine Klasse mehr Vorstellungsübungen gemacht hat als eine andere heißt nicht, dass die Klasse dieselben Vorstellungsübungen gemacht hätte und darüber hinaus noch andere. Es gibt also Vorstellungsübungen, die in allen Klassen durchgeführt wurden, es gibt aber auch solche, die von einer Klasse gemacht wurden und von einer anderen nicht.

[30] In der Schweiz steht die Note 6 für „sehr gut“, 5 für „gut“, 4 für „genügend“, 3 für „ungenügend“, 2 für „schwach“ und die Note 1 für „sehr schwach“. Damit wird – im Gegensatz zur Notengebung in Deutschland – der genügende Bereich mit einer Spanne von zwei und der ungenügende Bereich mit einer Spanne von drei Noten erfasst.

	Befragung a) ⟵			⟶ Befragung b)		Noten-
	GB 11	GB 12.1	GB 12.2	GB 10	GE 11	schnitt
Notenschnitt m	4,59	4,14	4,33	4,05	4,38	4,32
Standardabweichung	0,996	1,125	0,236	0,522	0,684	0,808
Notenschnitt w	4,42	4,20	4,07	4,25	4,13	4,22
Standardabweichung	0,571	0,600	0,703	0,901	0,650	0,717
Notenschnitt	4,50	4,18	4,15	4,16	4,32	4,27
Standardabweichung	0,826	0,883	0,630	0,778	0,706	0,767

Tab. 3.3: Mathematiknoten der befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten

Kodierung: Zuerst werden die Beurteilungen der korrekt bearbeiteten Ankreuz-Items erfasst.[31] Da sie qualitativer Natur sind, werden sie zur statistischen Weiterverarbeitung wie folgt kodiert: „stimmt“ $\widehat{=}$ 5, „stimmt eher“ $\widehat{=}$ 4, „weder – noch“ $\widehat{=}$ 3, „stimmt eher nicht“ $\widehat{=}$ 2 und „stimmt nicht“ $\widehat{=}$ 1.

Mit dieser Kodierung wird eingefangen, dass das Skalenniveau der Antwortdaten ordinal ist. Da wie bei Leistungsnoten davon ausgegangen werden kann, dass die Abstände zwischen zwei benachbarten Antworten gleich groß sind, widerspiegelt die Kodierung darüber hinaus, dass sich die Antworten auf Intervallniveau, das heißt metrisch interpretieren lassen.

Statistische Weiterverarbeitung: Um die Auswertung der Befragung zu erleichtern, müssen die vielen Einzelbeurteilungen jeder Behauptung zusammengefasst werden. Da die Kodierungen intervallskaliert aufgefasst werden, eignen sich dazu die statistischen Kenngrößen des Mittelwerts und der Standardabweichung:

- Mit dem *(arithmetischen) Mittelwert* lassen sich die kodierten Beurteilungen einzelner Untergruppen von Befragten (Geschlecht, Klassen) in

[31] Wenn ein Ankreuz-Item nicht oder uneindeutig (Kreuzchen befindet sich *zwischen* zwei Kästchen oder in *zwei* benachbarten bzw. weiter auseinander liegenden Kästchen) beantwortetet wird, wird ins entsprechende Feld der Kodierung nichts eingetragen und die Antwort wird damit in der weiteren Auswertung nicht in Betracht gezogen. Zwei Kreuzchen in *demselben* Kästchen werden als ein Kreuzchen interpretiert und berücksichtigt.

Bezug auf einzelne Items zusammenfassen. Zudem lassen sich durch Mittelwertbildung Verzerrungen wie die Bevorzugung extremer Antworten, Schönrederei oder negative Herabsetzung wenn auch nicht ausmerzen, so doch verringern. [Helmke 2004, S. 167]

Da der Mittelwert die zentrale Lage der Beurteilungsverteilung von Ankreuz-Items beschreibt, nenne ich ihn im Ergebnisabschnitt 3.2.3 *Beurteilungsmittel*. Dieses wird je nach Wert wie folgt versprachlicht: 5 $\widehat{=}$ „klare Zustimmung“, 4 $\widehat{=}$ „verhaltene Zustimmung“, 3 $\widehat{=}$ „indifferente Beurteilung“, 2 $\widehat{=}$ „verhaltene Ablehnung“ und 1 $\widehat{=}$ „klare Ablehnung“.

- Da die *Standardabweichung* die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittelwert misst, eignet sie sich als Maß für die Streuung einer Beurteilungsverteilung um ihre zentrale Lage. Damit gibt sie an, wie groß die Übereinstimmung bzw. die Uneinigkeit innerhalb einer Untergruppe von Befragten in Bezug auf ein Ankreuz-Item ist.

  Der Streuungsbereich wird durch ein Fehlerbalkendiagramm dargestellt, in dem vom arithmetischen Mittelwert aus Balken in der Länge einer Standardabweichung abgetragen werden. Je kleiner die Standardabweichung, desto besser repräsentiert das Beurteilungsmittel die ihm zugrunde liegenden Beurteilungen und desto mehr Konsens besteht unter diesen Beurteilungen. Den Streubereich nenne ich im Folgenden *Beurteilungsspektrum*.

- Zum *Vergleich* zweier Beurteilungsverteilungen werden deren arithmetische Mittelwerte herangezogen. Zum Vergleich, wie stark die Beurteilungen zweier Gruppen um ihr jeweiliges Beurteilungsmittel streuen, werden die entsprechenden Standardabweichungen direkt miteinander verglichen.[32]

Alle Analysen im Zusammenhang mit der deskriptiven Aufbereitung werden mit dem Statistik-Paket SPSS berechnet und graphisch dargestellt.[33]

3.2.2.5 Vorgehen zur Auswertung der Antwort-Items

Zur Auswertung der Antwort-Items werden Kategorien entwickelt, welche die Sinnstrukturen der Antworten erfassen und in denen sich die einzelnen

[32] Da die vorliegenden Daten nicht verhältnisskaliert sind und damit nicht davon ausgegangen werden muss, dass eine Streckung des Mittelwerts eine entsprechende Streckung der Streuung zur Folge hat, wird nicht der in [Stahel 2002, S. 20] zum Vergleich von Streuungen empfohlene Variationskoeffizient herangezogen.

[33] Version 11.0.3 für Mac OS X

Antworten zusammenführen lassen. Unter anderem wird auch ausgezählt, wie viele Antworten in jede einzelne Kategorie fallen.

3.2.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Beurteilungen und Antworten der Fragebogen-Umfrage entlang den Forschungsfragen zur Einstellungs-, zur Wirkungs- und zur Durchführungsakzeptanz (siehe Abschnitt 3.2.1) dargestellt und erörtert. Die drei entsprechenden Ergebnisteile sind immer nach dem gleichen Schema aufgebaut:

- Zum Vergleich der *Ankreuz-Items*, die derselben Akzeptanzkategorie zugeordnet wurden, wird ihre deskriptiv-statistische Auswertung in einer *Übersicht* präsentiert. Dazu werden die Beurteilungsmittel und Beurteilungsspektren in einem Profil dargestellt. Zum Vergleich der geschlechtstypischen Akzeptanz werden die Beurteilungsmittel und -spektren zusätzlich aufgegliedert. Zur Zusammenschau aller Beurteilungen derselben Akzeptanzkategorie werden die Beurteilungsmittel negativ formulierter Items für die Profile umgepolt und der zugehörige Aussagetext durch ein vorangestelltes „NICHT:“ gekennzeichnet.[34]

- Auch die Ergebnisse der *Antwort-Items* werden zunächst in einer *Übersicht* präsentiert. Um einen quantitativen Eindruck von der Verteilung der Antworten zu geben, wird tabellarisch angegeben, wie viele Antworten in welche Beurteilungskategorie fallen. Im Hinblick auf die Forschungsfrage nach der geschlechtstypischen Akzeptanz werden diese Werte entsprechend spezifiziert.

- Anschließend werden *einzelne Originalantworten* zitiert. Sie sind aus der Menge aller Antworten so gewählt, dass sie möglichst das ganze inhaltliche Antwortspektrum beider Geschlechter abbilden, aber nur einmal vorkommen, um dann im Abschnitt der Effekte von Vorstellungsübungen (Abschnitt 5.3) wieder aufgegriffen zu werden.[35]

[34] Die den Profilen zugrunde liegenden arithmetischen Mittelwerte und Standardabweichungen sind im Anhang B abgedruckt. Die Einzelitemanalysen sowie die ihnen zugrunde liegenden Beurteilungshäufigkeiten werden aus Platzgründen jedoch nicht abgedruckt. Sie können beim Autor angefordert werden.

[35] Wenn die formulierte Antwort auf eine Frage in verschiedene Kategorien gehört, wird sie aufgeteilt und die Teilantworten den entsprechenden Kategorien zugeordnet. So drückt die Markierung [...] im Zitat aus, dass der betreffende Antworttext (eine oder mehrere) weitere Intentionen enthält, die in anderen Kategorien berücksichtigt wurden.

- Zum Schluss werden die Ergebnisse jeder Akzeptanzkategorie *zusammengefasst* und die entsprechenden Forschungsfragen beantwortet.

Alle in diesem Abschnitt formulierten Aussagen beziehen sich auf die 88 Fragebogen, die von den befragten Klassen ausgefüllt und zurückgegeben wurden. Absolut wie relativ besehen haben mehr Schülerinnen als Schüler (49 von 52 versus 39 von 47) ihren Fragebogen zurückgegeben.

3.2.3.1 Ergebnisse zur Einstellungsakzeptanz

Wie bereits ausgeführt, sind der Einstellungsakzeptanz fünf Ankreuz-Items des Fragebogens und keines der Antwort-Items zugeordnet (siehe S. 48).

Übersicht über die Beurteilungen zur Einstellungsakzeptanz: Das Beurteilungsmittel von zwei der drei positiv formulierten Items zur Einstellungsakzeptanz liegt zwischen verhaltener und klarer Zustimmung und die der beiden negativ formulierten Items zwischen verhaltener und klarer Ablehnung, wie das Profil in Abbildung 3.2 zeigt.[36]

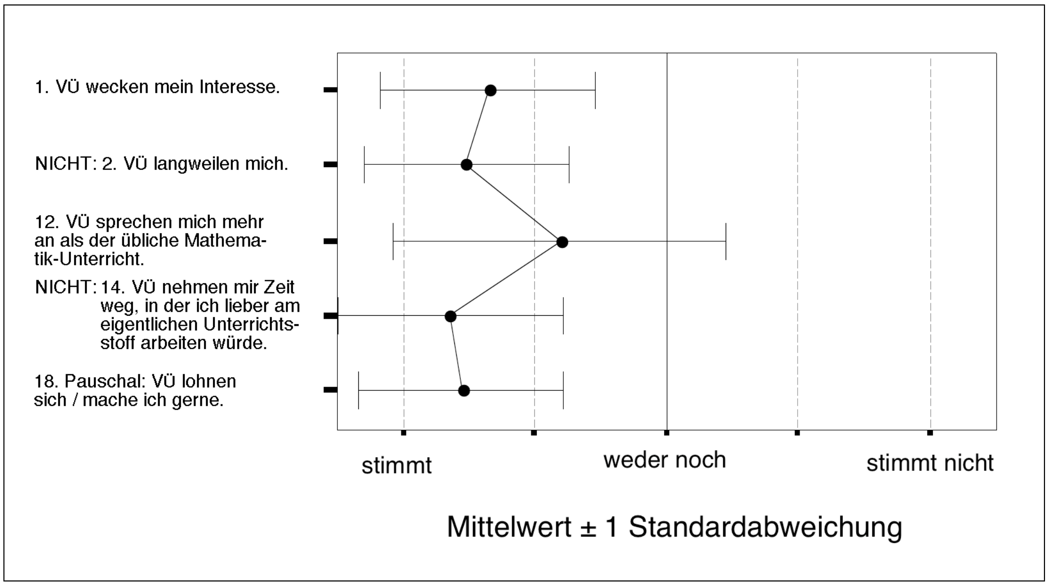

Abb. 3.2: Profil der Items zur Einstellungsakzeptanz

Die nach Geschlecht aufgegliederten Profile der Ankreuz-Items zur Einstellungsakzeptanz zeigt Abbildung 3.3. Alle Beurteilungsmittel der Schülerin-

[36] Zur Darstellung negativ formulierter Items siehe S. 56. Für die zugrunde liegenden arithmetischen Mittelwerte und Standardabweichungen siehe S. 255 f.

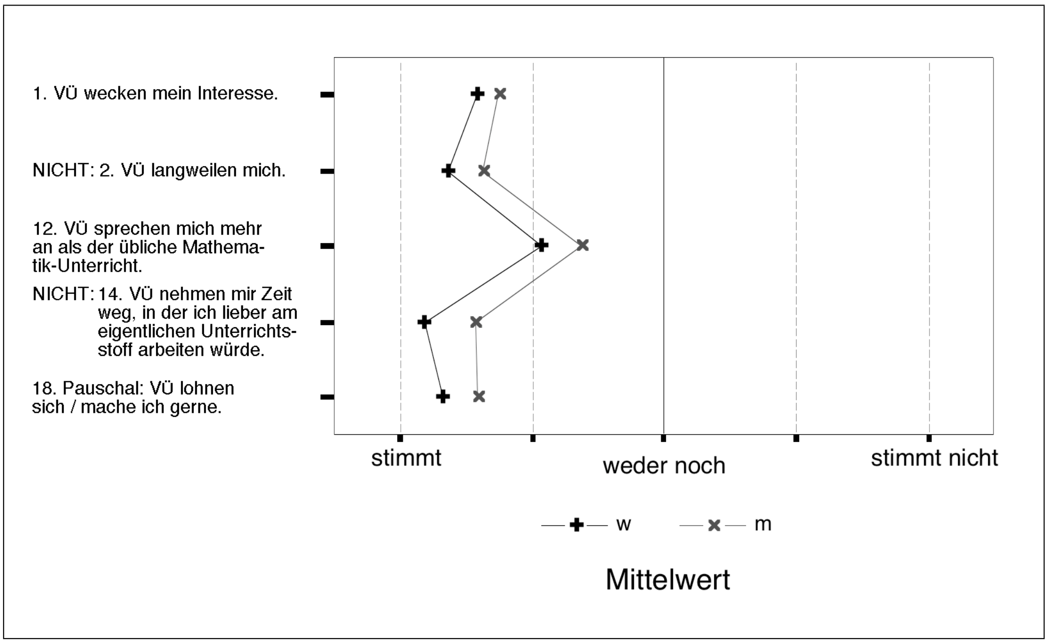

Abb. 3.3: Profile der Items zur Einstellungsakzeptanz, nach Geschlecht

nen sind etwas extremer als die der Schüler, das heißt, sie stimmten den positiv formulierten Behauptungen etwas stärker zu und lehnten die negativ formulierten etwas stärker ab. Im Vergleich mit den Beurteilungsspektren sind die Beurteilungsunterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern jedoch klein. Zudem fällt auf, dass die beiden Profile der Geschlechter innerhalb eines Bandes mehr oder weniger konstanter Breite verlaufen. Die Differenzen zwischen den Beurteilungsmitteln der Geschlechter sind bei den Items zur Einstellungsakzeptanz auch im Vergleich mit denen der (weiter unten besprochenen) Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz eher klein.

Insgesamt zur Einstellungsakzeptanz: Auf die Forschungsfrage nach der Einstellungsakzeptanz unter allgemeiner und geschlechtstypischer Perspektive *(F1a, c)* ergibt sich folgende Antwort:

Die Werte für die Einstellungsakzeptanz sprechen dafür, dass das Unterrichtsinstrument auf eine hohe Einstellungsakzeptanz stieß, und zwar bei hohem Konsens. Bis auf einige Ausnahmen machten die Befragten Vorstellungsübungen gerne. Sie gaben an, dass durch das Unterrichtsinstrument ihr Interesse geweckt wurde, sie keine Langeweile verspürten und keine Zeit vertrödelten, in der sie lieber am eigentlichen Unterrichtsstoff gearbeitet hätten.

Tendenziell ließen sie sich durch Vorstellungsübungen mehr ansprechen als durch den eigentlichen Mathematikunterricht.

All diese Einstellungen wurden von den Gymnasiastinnen etwas positiver beurteilt als von den Gymnasiasten. Damit lag die Einstellungsakzeptanz der Gymnasiastinnen für alle fünf Aussagen höher als die der Gymnasiasten. Einige wenige Schüler standen Vorstellungsübungen ablehnend gegenüber.

Damit unterscheidet sich die Einstellungsakzeptanz von der weiter unten besprochenen Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz, die weniger hoch und weniger klar ausfällt. Da dort nicht nur vorformulierte Behauptungen zu beurteilen, sondern auch offene Fragen zu beantworten waren, bringen die entsprechenden Ergebnisse jedoch zusätzlich Erkenntnisse über die Art und Weise der entsprechenden Akzeptanz.

3.2.3.2 Ergebnisse zur Wirkungsakzeptanz

Der Wirkungsakzeptanz sind neun Ankreuz-Items des Fragebogens und zwei der Antwort-Items zugeordnet (siehe S. 48 f.).

Übersicht über die Beurteilungen zur Wirkungsakzeptanz: Wie dem zur Wirkungsakzeptanz gehörenden Profil in Abbildung 3.4 entnommen werden kann, liegen hier die meisten Beurteilungsmittel eher tiefer als bei den Aussagen zur Einstellungsakzeptanz: Drei Beurteilungsmittel liegen zwischen klar und verhalten positiver Beurteilung, fünf Beurteilungsmittel liegen zwischen verhalten positiver und indifferenter Beurteilung, und das Beurteilungsmittel eines positiv formulierten Items liegt im ablehnenden Bereich.[37]

Die geschlechtstypischen Profile in Abbildung 3.5 zeigen erneut eine positivere Beurteilung durch Schülerinnen, allerdings mit zwei Ausnahmen. Anders als bei den geschlechtstypischen Beurteilungen der Aussagen zur Einstellungsakzeptanz unterscheiden sich hier die Beurteilungsmittel der beiden Geschlechter entweder stark oder dann unwesentlich.

Übersicht über die Antworten zur Wirkungsakzeptanz: Die beiden offenen Fragen „Inwiefern regen Sie VÜ an bzw. verärgern Sie (kurzfristig)?“ (Nr. 19) und „Was für Veränderungen können Sie an sich beobachten, die mit den VÜ zu tun haben könnten (langfristig)?“ (Nr. 20) forderten die Schülerinnen und Schüler auf, die *Wirkungen* des Unterrichtsinstruments auf ihre

[37] Zur Darstellung negativ formulierter Items siehe S. 56. Für die zugrunde liegenden arithmetischen Mittelwerte und Standardabweichungen siehe S. 255 f.

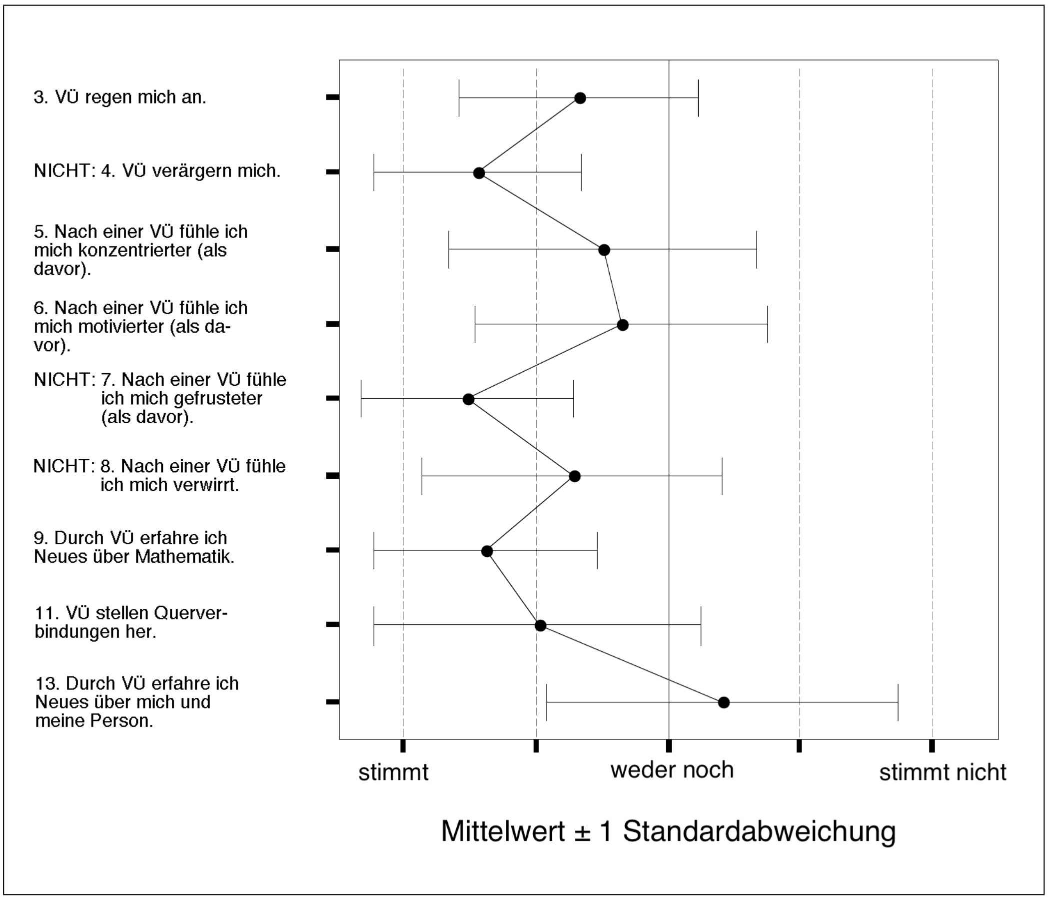

Abb. 3.4: Profil der Items zur Wirkungsakzeptanz

eigene Person einzuschätzen. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse dieser beiden Frage zusammengefasst und miteinander besprochen.[38]

Die Fragen nach kurzfristigen Anregungen und langfristigen Veränderungen hatten noch keine klar bestimmten Wirkungen im Blick. Wie die Übersicht über alle kategorisierten Wirkungen in Tabelle 3.4 und 3.5 zeigt, gehen die beschriebenen Anregungen und Veränderungen zu vier Fünftel in Rich-

[38] Die Frage nach Verärgerungen wurde von einem Viertel der Schülerinnen und Schüler beantwortet (22 Nennungen, wovon 8 m und 14 w), während die restlichen Fragebogen keine inhaltlichen Antworten enthalten. Die Fragen nach Anregungen und Veränderungen wurde von einem Siebtel nicht beantwortet (13 Nennungen, wovon 6 m und 7 w). Rund zwei Drittel der Befragten haben die Frage nach kurzfristigen Anregungen bzw. nach langfristigen Veränderungen beantwortet (58 Nennungen, wovon 26 m und 32 w bzw. 56 Nennungen, wovon 27 m und 29 w), wobei über vierzig Prozent Vorstellungsübungen sowohl kurz- als auch langfristige Wirkungen zuschreiben (3 Nennungen, wovon 20 m und 19 w).

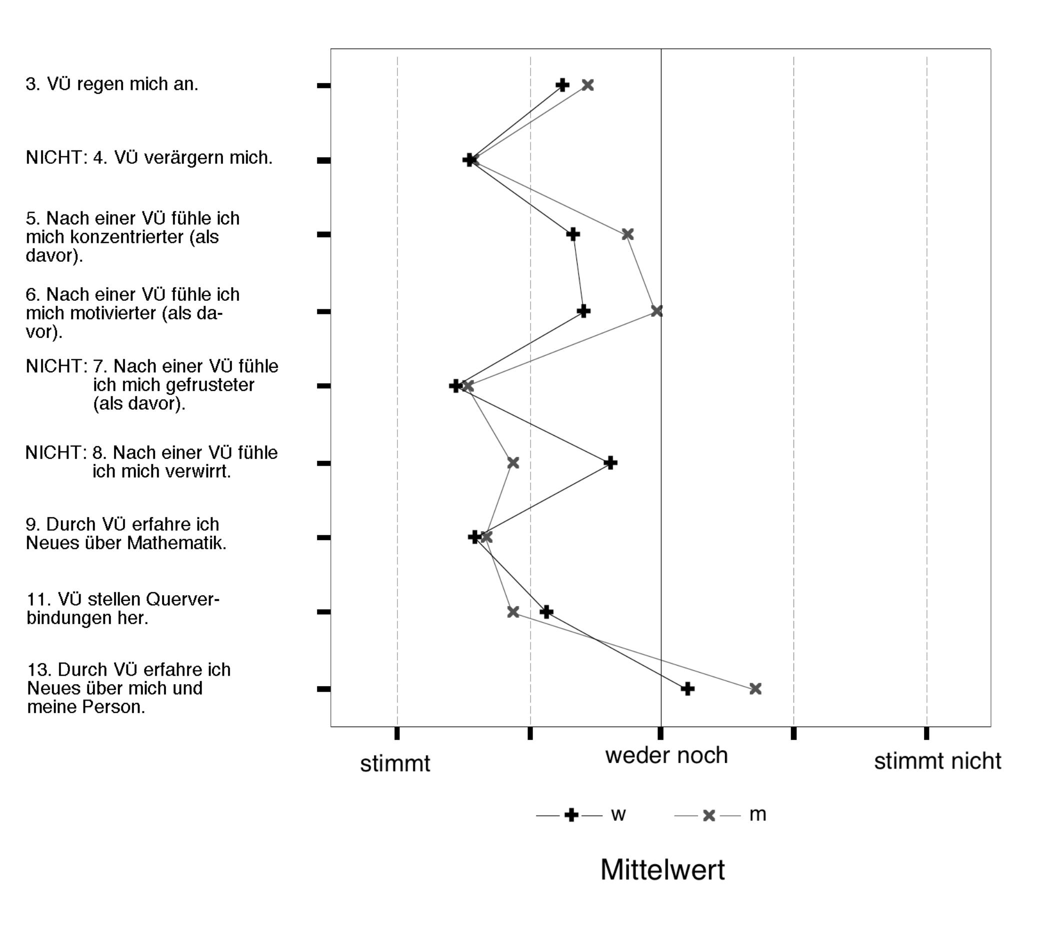

Abb. 3.5: Profile der Items zur Wirkungsakzeptanz, nach Geschlecht

tung *kognitiver* Wirkungen und zu einem Fünftel in Richtung *emotionaler* Wirkungen. Nur drei Antworten beschreiben *soziale* Wirkungen. Auf die Frage nach Gründen für Verärgerungen gingen etwa gleich viele Antworten ein wie positive Emotionen genannt wurden.[39]

[39] Die beiden Antwort-Items Nr. 19 und 20 sind unglücklich formuliert. So ist das Item Nr. 19 eine Doppelfrage, deren erste Teilfrage offener ist als die zweite, auf negative Emotionen eingeschränkte Teilfrage. Da bereits eine der unter Nr. 20 gegebenen Antworten eine negative Emotion beschreibt (Verärgerung durch Vorstellungsschwierigkeiten), werden auch die in der zweiten Teilfrage von Nr. 19 erfragten Anlässe für Verärgerungen dieser Kategorie zugerechnet.

Zudem unterscheidet sich das Antwort-Item Nr. 20 von der ersten Teilfrage aus Nr. 19 hauptsächlich durch die zeitliche Dauer der Wirkungen. Da die Fragen nach kurzfristigen Anregungen bzw. langfristigen Veränderungen nicht einheitlich interpretiert wurden, wird die zeitliche Unterscheidung nicht weiter berücksichtigt.

Kategorie	Unterkategorie	total	m	w
***Kognitive* Auswirkungen**	***Positive* kognitive Wirkungen:**			
	· Kennenlernen von neuen mathematischen Inhalten	7	3	4
	· Herstellen von Bezügen zu (außer)mathematischen Themen	8	5	3
	· Wecken von Interesse	12	3	9
	· Training des geometrischen bzw. räumlichen Vorstellungsvermögens	18	10	8
	· Training des logischen bzw. abstrakten Denkens	6	5	1
	· souveräner Umgang mit mathematischen Fragestellungen	9	5	4
	· Beschäftigung bzw. Erinnerung	11	2	9
	· besseres Verständnis von Mathematik	9	4	5
	· Selbstreflexion	10	4	6
	· anderes Bild von Mathematik	9	2	7
		99	**43**	**56**
	***Negative* kognitive Wirkungen:**			
	· Verwirrung	1	1	
	· Langeweile	2	2	
		3	**3**	

Tab. 3.4: Kognitive Wirkungen von Vorstellungsübungen

Kategorie	Unterkategorie	total	m	w
***Emotionale* Auswir-kungen**	***Positive* emotionale Wirkungen:**			
	· Entspannung und Abbau von Stress	6	1	5
	· Spaß und Freude	7	3	4
	· Konzentration und Motivation	9	3	6
		22	**7**	**15**
	***Negative* emotionale Wirkungen in Form von Verärgerungen:**			
	Gründe:			
	· Vorstellungsschwierigkeiten	18	5	13
	· Nicht-gestimmt-Sein	3	2	1
	· Deutungen durch andere Personen	2	1	1
	· bestimmte mathematische Inhalte	1	1	
		24	**9**	**15**
***Soziale* Auswir-kungen**	***Positive* soziale Wirkungen:**			
	· Einbringen der persönlichen Meinung	1	1	
	· Freiheit der eigenen Gedanken	1	1	
	· Interesse für Mitschülerinnen und Mitschüler	1		1
		3	**2**	**1**

Tab. 3.5: Emotionale und soziale Wirkungen von Vorstellungsübungen

Es fällt auf, dass rund die Hälfte der gebildeten Unterkategorien bereits mehr oder weniger explizit in den Ankreuz-Items enthalten ist. Das gilt zum Beispiel für das „Kennenlernen von neuen mathematischen Inhalten“ und für die Aussage „Durch VÜ erfahre ich Neues über Mathematik“ (Nr. 9). Für die zweite Hälfte der Antworten mussten andere, neue Unterkategorien gebildet werden, so etwa „Training des geometrischen bzw. räumlichen Vorstellungsvermögens“ (kognitiv), „Spaß und Freude“ (emotional) und auch eine soziale Kategorie von Antworten.

Insgesamt gesehen entspricht das Verhältnis der eingegangenen Antworten mit Hinblick auf das Geschlecht dem der Schülerinnen und Schüler. In einzelnen (Unter-)Kategorien jedoch stammen überproportional viele Antworten von Schülerinnen bzw. Schülern.[40]

- In der Kategorie der positiven kognitiven Wirkungen insgesamt entspricht das Verhältnis der eingegangenen, nach Geschlecht differenzierten Antworten dem der Schülerinnen und Schüler. Allerdings gibt es Unterkategorien von Antworten, in denen die Schülerinnen stärker vertreten sind, so etwa in „Wecken von Interesse“, „anderes Bild von Mathematik“ oder „Beschäftigung bzw. Erinnerung“. Andererseits konstatieren Schüler Anregungen und Veränderungen in den Bereichen „Training mathematischer Fähigkeiten“ und „Training des logischen bzw. abstrakten Denkens“. Die wenigen negativen kognitiven Wirkungen wie „Langeweile“ und „Verwirrung“ stammten sogar ausschließlich von Schülern.

- Der Kategorie (positiver und negativer) emotionaler Wirkungen lassen sich überproportional viele Antworten von Schülerinnen zuordnen. Schülerinnen waren es, die in erster Linie „Entspannung und Abbau von Stress“, aber auch Verärgerung durch „Vorstellungsschwierigkeiten“ nannten. Dies steht in einem gewissem Gegensatz zum Beurteilungsverhalten der Befragten hinsichtlich „VÜ verärgern mich“ (Nr. 4), die von Schülerinnen ebenso deutlich abgelehnt wurde wie von Schülern (siehe S. 61).

[40] Überproportional meint hier, dass das jeweilige Verhältnis der Anzahl an Antworten von Personen des einen zu derjenigen des anderen Geschlechts deutlich größer ist als das Verhältnis der Schülerinnen und Schüler selbst, nämlich 49:39 (siehe Tab. 3.1, S. 52).

Auswahl einzelner Antworten zur Wirkungsakzeptanz: Nach der Übersicht über die Aussagen zur Wirkungsakzeptanz werden nun entlang der drei Kategorien „kognitive, emotionale und soziale Wirkungen“ ausgewählte Antworten zitiert, welche das Antwortspektrum der Befragten abbilden.[41]

Kognitive Wirkungen: Fast alle Antworten der kognitiven Kategorie attestieren Vorstellungsübungen *positive* Wirkungen. So lernten einige Schülerinnen und Schüler durch Vorstellungsübungen *neue, unbekannte mathematische Themen* kennen oder entdeckten *Bezüge* zu anderen, mathematischen oder außermathematischen Themen:

- *„Einführung in neue Themen [...]“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Wenn man den Bezug zwischen Mathe u. Welt sieht ist das für mich sehr wichtig.“* (Schüler, Klasse GB 10)
- *„Ich erkenne zum Beispiel, wo Mathe im Alltag auftritt.“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„Ich mag den absolut realitätsfernen Philosophieanteil der Mathematik, und die Vorstellungsübungen geben mir Zugang dazu.“* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Ebenso viele Befragte berichteten, dass Vorstellungsübungen ihr *Interesse* weckten. Das Interesse richtete sich nicht nur auf fachliche Inhalte, sondern auch auf die Vielfalt der individuellen Zugänge.

- *„kurzfristiges Interesse am math. Thema der VÜ“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Sie wecken mein Interesse, da sie ‚lebendiger‘ als ‚Unterrichtsmathe‘ sind.“* (Schülerin, Klasse GE 11)
- *„Sie sind spielerisch und ich finde es noch interessant, wie dasselbe bei anderen ganz verschiedene Sachen auslösen kann.“* (Schülerin, Klasse GE 11)

[41] Die Schreibweise der Antworten wurde inklusive Rechtschreibung und Zeichensetzung von den Fragebogen übernommen.

Am häufigsten wurden Vorstellungsübungen Wirkungen auf *mathematische Fähigkeiten* zugesprochen. Ein Großteil der entsprechenden Antworten bezieht sich auf eine *Herausforderung* oder ein *Training* des *geometrischen* bzw. *räumlichen Vorstellungsvermögens*:

- *„Ich fühle mich geübter darin, mir etwas vorzustellen und versuche dies zu perfektionieren [...].“* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Training und Ausdauererhöhung der visuellen Vorstellungskraft“* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„Ich glaube, mein räumliches Vorstellungsvermögen ist durch die VÜ besser geworden.“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„Man sieht die Sachen (z. B. Vielecke oder Körper) schneller und klarer in seinen Vorstellungen so kann man besser damit umgehen und sich orientieren.“* (Schülerin, Klasse GE 11)
- *„Ich kann mir nun auch andere Dinge aus der Mathematik besser vorstellen.“* (Schülerin, Klasse GB 11)

Einzelne Antworten beziehen sich auf *logisches* bzw. *abstraktes Denken*:

- *„Oft interessante Übungen, die zum Denken anregen [...]“* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„logisches Denken verbessern“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„besseres abstraktes Denken“* (Schüler, GE 11)

Ebenfalls berichtete eine ganze Reihe von Personen über einen *souveräneren kognitiven Umgang* mit mathematischen Fragestellungen:

- *„bessere Vorstellung der gefragten Problematik. Im Kopf das Ganze ablaufen lassen und dann erst schriftlich anfangen.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„bei Prüfungen die Aufgabe zuerst lesen, dann denken und erst jetzt handeln“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

- *„Ich versuche mir Mathe-Aufgaben bildlicher vorzustellen, was mir auch hilft, diese einfacher zu lösen.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„[...] bei Problemen einer Aufgabe: Betrachtung / Miteinbeziehung verschiedener Aspekte“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Andere beschriebene Wirkungen lagen im Bereich des *Beschäftigens* und *Erinnerns* über die Vorstellungsübungen hinaus:

- *„Gedanken über die VÜ selbst“* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Sie regen mich an, meine Gedanken weiterzuführen und mit Vorstellungen zu spielen (zB. Unendlichkeit) [...]“* (Schülerin, Klassse GB 11)
- *„Gewisse beeindruckende Übungen können mich einen ganzen Tag lang beschäftigen.“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„Ich habe nochmals alle VÜ mit meinem Vater gemacht (sehr witzig + interessant). Ich erinnere mich gern daran, wenn etwas ähnliches im Unterricht vorkommt, und denke, dass man das mit einer VÜ verbinden könnte!“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Ich kann mich länger daran erinnern als an etwas gelesenes oder gehörtes!“* (Schülerin, Klasse GB 11)

Zudem wurde immer wieder vom besseren *Verständnis mathematischer Sachverhalte* durch Vorstellungsübungen berichtet:

- *„eine Art ‚Aha‘-Erlebnisse [...]“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Mir werden Sachen klar, über die ich gar nie so richtig nachdachte.“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„ein besseres Verständnis für die Mathematik“* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Ich finde Mathematik nicht mehr so kompliziert, ob es wirklich an den VÜ liegt, weiss ich nicht.“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Die Befragten stellten auch *selbstaufmerksame* und *selbstreflexive Wirkungen* fest und dachten über ihr Vorstellen und ihre Vorstellungen nach:

- *„bin interessiert, über Gebiete ‚hinterm inneren Auge' nachzudenken"* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Es ist mir bewusst geworden, dass es für ein (mathematisches) Problem immer viele Lösungswege gibt"* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Ich erfahre vieles über meine Denkweise und meine Art u. Weise, an (z. B.) mathematische Probleme heranzugehen"* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„Ich dachte manchmal darüber nach, warum ich es mir nicht vorstellen konnte."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Ich finde es interessant zu beobachten, welche Bilder in mir entstehen. Ich achte mich seit den VÜ mehr auf meine inneren Bilder allgemein."* (Schülerin, Klasse GB 10)

Schließlich beschrieben einige Personen (sie stammten alle aus derselben Klasse), durch Vorstellungsübungen Mathematik von einer anderen Seite kennengelernt zu haben bzw. lokalisierten Wirkungen von Vorstellungsübungen im Bereich eines *veränderten Bildes von Mathematik*:

- *„Mathematik von einer anderen Seite [...]"* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Man bekommt eine andere / weitere Vorstellung von Mathe als bei den üblichen eingegrenzten Themen."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Eigentlich überhaupt nichts, wenn dann nur unterbewusst, dass sie mir mein ziemlich negatives Bild von Mathe ein wenig verbessern."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Ich kann Mathematik in Form von etwas Vorstellbarem anwenden, was ansonsten bei Mathe nicht der Fall ist."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Einige Schüler schrieben Vorstellungsübungen *negative kognitive* Wirkungen wie *Langeweile* und *Verwirrung* zu, zum Beispiel:

- *„ehrlich gesagt finde ich sie langweilig und überflüssig [...]"* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„Verwirrung [...]"* (Schüler, Klasse GB 11)

Emotionale Wirkungen: Wie erwähnt zeigt ein Fünftel aller Antworten auf die Fragen nach Wirkungen und Veränderungen *Emotionen*. Die genannten emotionalen Wirkungen sind – bis auf eine Ausnahme – *positiver* Art und lassen sich in die drei Unterkategorien „Entspannung und Abbau von Stress", „Spaß und Freunde" und „Konzentration und Motivation" einteilen.[42]

Einige Personen gaben an, dass Vorstellungsübungen *entspannend* oder *stressabbauend* auf sie wirkten:

- *„Fast gar nicht, ein wenig Entspannung"* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„Ich kann mich entspannen. Eigentlich ist dies die einzige Zeit, in der ich mich entspanne während des Tages. Deshalb mag ich VÜ."* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Abbau von Stress (Beruhigung)"* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Einem weiteren Teil der Befragten machten Vorstellungsübungen *Spaß* oder *Freude*:

- *„Freude an der menschlichen Vorstellungskraft [...]"* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„mathematischen Problemen auf eine Art begegnen, die Spass macht"* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Ich freue mich am Freitag im Mathe auf den Anfang – am Freitag bin ich oft mehr an Mathe interessiert als sonst"* (Schüler, Klasse GB 11)

Und schließlich schrieben einige Schülerinnen und Schüler den Übungen eine Förderung ihrer *Konzentration* oder *Motivation* zu:

- *„Ich kann am Anfang der Stunde besser ‚auf Mathe umschalten'. [...]"* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Mein Gehirn ist jetzt ‚in Betrieb' (1. Schulstunde!)"* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

[42] Nur einige wenige Antworten gingen sowohl in kognitive als auch in emotionale Richtung.

- *„VÜ ist eine andere Welt als ein Aufgabenblatt. Ich kann mich dort einfacher bewegen → Motivation [...]“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Die bereits angesprochene Antwort auf die Frage nach langfristigen Wirkungen, die *negative Emotionen* ausdrückt, stammte von einer Schülerin:

- *„Teils nerve ich mich, dass ich es mir nicht vorstellen konnte.“* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Wie im letzten Zitat wurden Verärgerungen fast immer im Kontext von *Vorstellungsschwierigkeiten* genannt, die aufgrund eigener Unzulänglichkeiten oder choreographischer Gegebenheiten (mangelnde Zeit, unpräzise formulierte Vorstellungsanweisungen) entstanden:

- *„[...] Ich versuche sehr, eine Lösung zu finden, was aufregen kann, wenn es nicht gelingt.“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„[...] Sie regen mich auf, wenn ich die Bilder in meinen Gedanken nicht sehe [...].“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Wenn ich zuwenig Zeit zum Nachdenken habe, regen sie mich auf [...].“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„[...] ich ärgere mich nur, wenn ich etwas wegen der Formulierung nicht verstanden habe.“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„Ich kann keine Teile im Kopf zu einem Ganzen verbinden, sondern nur ‚ganze‘ Körper betrachten. Das ärgert mich ...“* (Schülerin, Klasse GB 10)

Daneben wurde als Grund für Verärgerungen auch angegeben, auf Vorstellungsübungen nicht *eingestimmt* zu sein:

- *„Manchmal fehlt mir die Lust!“* (Schüler, Klasse GB 10)
- *„[...] manchmal regen sie einen auch auf, wenn man nicht dazu in der Stimmung ist“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Regen mich auf, falls ich am Stoff <mehr> arbeiten will“* (Schüler, Klasse GB 11)

Eine Schülerin und ein Schüler ärgerten sich über *Deutungen* ihrer persönlichen Vorstellungen:

- *„Wenn zuviel darüber geredet wird. Jeder hat seine eigenen Gedanken!“* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Schließlich fühlte sich ein Schüler durch *bestimmte mathematische Inhalte* von Vorstellungsübungen verärgert:

- *„[...] VÜ, bei denen man sich nur Zahlen vorstellen muss!“* (Schüler, Klasse GB 11)

Soziale Wirkungen: Eine Schülerin und zwei Schüler beschrieben, wie sich Vorstellungsübungen auf ihren *sozialen Umgang* auswirkten. Es fällt auf, dass Vorstellungsübungen den beiden Schülern eine andere Positionierung ihrer Person im Klassenverband ermöglichten (Schutz / Einbringung), während sich die Schülerin für die Reaktionen ihrer Mitschülerinnen und -schüler interessierte.[43]

- *„[...] niemand kann meine Gedanken sehen“* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„Ich kann meine persönliche Meinung im Unterricht einbringen.“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„[...] ich finde es noch interessant, wie dasselbe bei anderen ganz verschiedene Sachen auslösen kann.“* (Schülerin, Klasse GE 11)

Insgesamt zur Wirkungsakzeptanz: Zusammenfassend ergibt sich für die Forschungsfrage nach der Wirkungsakzeptanz unter allgemeiner und unter geschlechtstypischer Perspektive *(F1b, c)* folgendes Bild:

Die Werte für die Wirkungsakzeptanz sprechen dafür, dass mathematische Vorstellungsübungen auf eine Wirkungsakzeptanz stießen, die etwas weniger

[43] Das dritte Zitat wurde bereits im Kontext der Interesseweckung (S. 65) genannt.

hoch war als die Einstellungsakzeptanz, die aber immer noch hoch ist. Die Beurteilungsmittel einiger Items liegen in einem ähnlichen Bereich wie die der Einstellungsakzeptanz, andere liegen weniger hoch, aber bis auf eine Ausnahme liegen alle über der Indifferenzgrenze. Während bei hohen Beurteilungsmitteln großer Konsens herrscht, besteht bei den tieferen Beurteilungsmitteln ein geringerer Konsens. Die befragten Schülerinnen und Schüler waren der Ansicht, dass sie von Vorstellungsübungen fachlich profitierten und vor allem Neues über Mathematik, über sich jedoch eher wenig erfuhren. Etwas unklar ist, ob durch Vorstellungsübungen Querverbindungen hergestellt wurden.

Bei der Wirkungsakzeptanz bestanden in Bezug auf die Einschätzung motivations- und konzentrationssteigernder Wirkung deutliche, geschlechtstypische Unterschiede: Diese Motivations- und Konzentrationssteigerung wurde von den Schülern weniger positiv beurteilt als von den eher zustimmenden Schülerinnen. Umgekehrt wiesen die Schüler verwirrende Wirkungen sehr viel deutlicher zurück als die Schülerinnen, die sich hier indifferent äußerten. Eine verärgernde und frustrierende Wirkung hatten weder Schülerinnen noch Schüler bemerkt.

Die Art und Weise der beschriebenen Wirkungsakzeptanz deckt einen breiten Bereich ab. Die Schülerinnen und Schüler schrieben Vorstellungsübungen in erster Linie kognitive Wirkungen, aber auch emotionale und vereinzelt soziale Wirkungen zu. Etwa die Hälfte der genannten Wirkungen entspricht Wirkungen, die in den Ankreuz-Items bereits genannt wurden. Die andere Hälfte der beschriebenen Wirkungen ist von anderer Natur. Während kognitive Wirkungen von beiden Geschlechtern geltend gemacht wurden, nannten Schülerinnen emotionale Wirkungen häufiger als Schüler.

Damit liegt die Wirkungsakzeptanz von Vorstellungsübungen etwas höher als die Durchführungsakzeptanz, um die es im folgenden Abschnitt geht.

3.2.3.3 Ergebnisse zur Durchführungsakzeptanz

Der Durchführungsakzeptanz sind drei Ankreuz-Items und zwei Antwort-Items zugeordnet (siehe S. 50).

Übersicht über die Beurteilungen zur Durchführungsakzeptanz: Wie dem Profil zur Durchführungsakzeptanz in Abbildung 3.6 entnommen werden kann, liegen hier die Beurteilungsmittel zwischen verhalten positiver Beurteilung und Indifferenz. Im Unterschied zu den Items zur Einstellungsakzeptanz liegen hier die Beurteilungsmittel deutlich näher bei der Indifferenzgrenze.

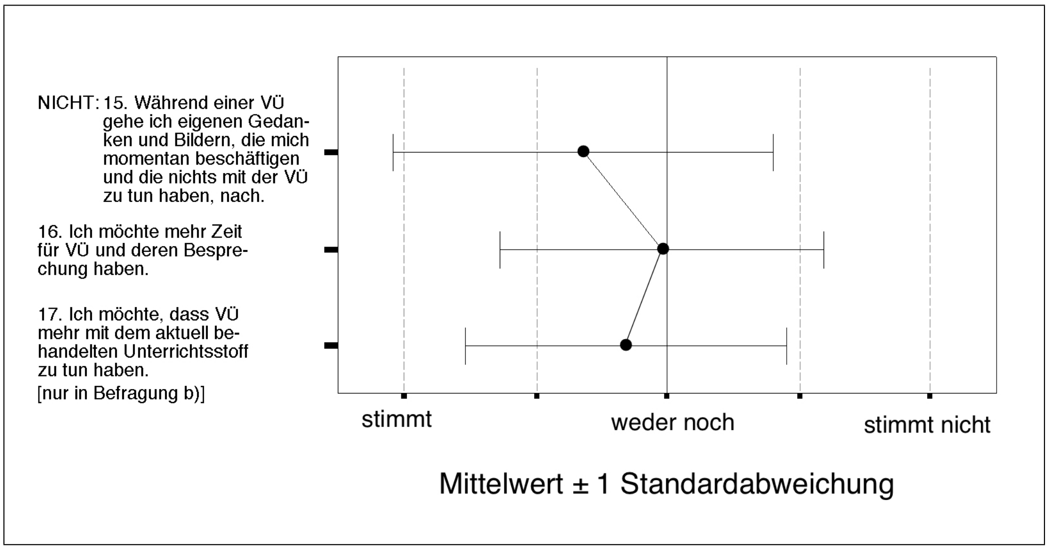

Abb. 3.6: Profil der Items zur Durchführungsakzeptanz

Auch die geschlechtstypischen Profile dieser Items fallen weniger einheitlich aus als bei der Einstellungs- und der Wirkungsakzeptanz (siehe Abb. 3.7).[44]

Übersicht über die Antworten zur Durchführungsakzeptanz: Die beiden Fragen „Was müsste an den VÜ für Sie geändert werden, damit VÜ Sie mehr ansprechen würden (thematisch / sprachlich / organisatorisch)?“ (Nr. 21) sowie „Wollen Sie weiterhin VÜ machen? Wie oft?“ (Nr. 23) wurden der Durchführungsakzeptanz zugeordnet. Da sich die entsprechenden Ergebnisse nicht wie im Fall der Antwort-Items zur Wirkungsakzeptanz zusammenfassen lassen, werden sie einzeln referiert.

Nr. 21: Rund vierzig Prozent der Befragten haben die Frage nach Änderungsvorschlägen nicht beantwortet. Zumeist handelte es sich um Schüler.[45] Es fällt auf, dass alle Antworten aus den in der Fragestellung bereits formulierten vorgeschlagenen Änderungsbereichen stammen. Da die sprachlichen

[44] Zur Darstellung negativ formulierter Items siehe S. 56. Für die entsprechenden arithmetischen Mittelwerte und Standardabweichungen siehe S. 255 f.

[45] Der Schüler, der Vorstellungsübungen ablehnte, schrieb: *„Ich sehe keinen Sinn in VÜ – wenn man Aufgaben macht, ist das auch eine Art VÜ“* (Schüler, Klasse GE 11). Einige Personen machten zwar keine Änderungsvorschläge, erklärten sich mit der Durchführung der Vorstellungsübungen aber einverstanden: *„Für mich persönlich sind keine Änderungen nötig“* (Schüler, Klasse GE 11) bzw. *„Nichts. Ein Teil der Übungen interessieren mich mehr als die anderen, aber das sieht ein anderer auch wieder anders.“* (Schülerin, Klasse GB 12.1).

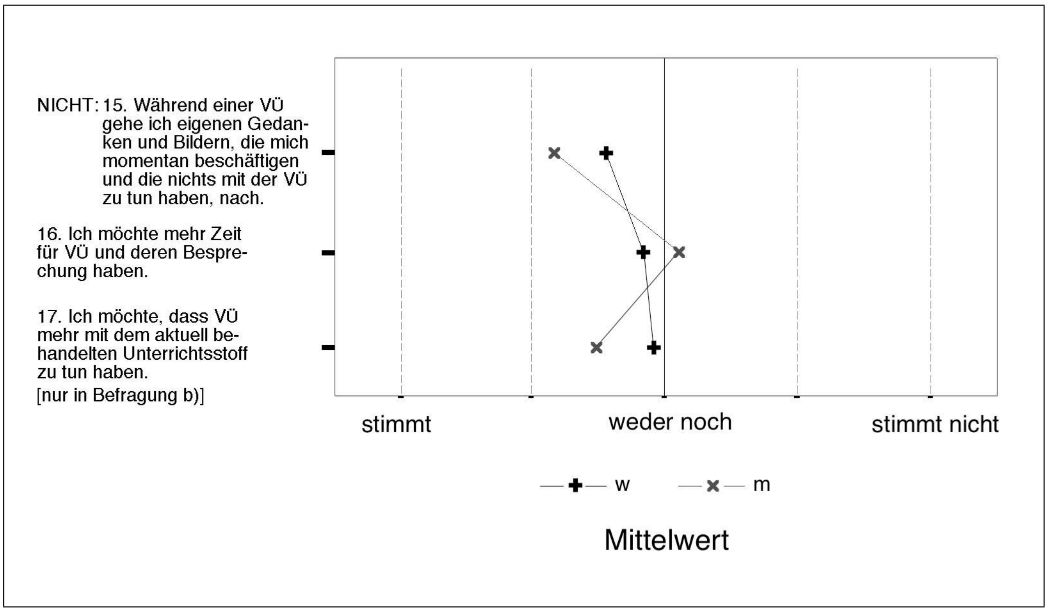

Abb. 3.7: Profile der Items zur Durchführungsakzeptanz, nach Geschlecht

Änderungsvorschläge, die eingegangen sind, ausschließlich die Präzision der Vorstellungsanweisungen betreffen, wurden sie unter den organisatorischen Vorschlägen subsumiert. Damit betrafen die Änderungsvorschläge zu zwei Dritteln die *Organisation der Durchführung* von Vorstellungsübungen, zu einem Drittel die *Inhalte* der Vorstellungsübungen. Die Tabelle 3.6 zeigt die Unterkategorien der formulierten Vorschläge.

Beim Blick auf das geschlechtstypische Antwortverhalten fällt auf, dass Änderungsvorschläge häufiger von Schülerinnen stammen als von Schülern:

- Besonders in der Kategorie der organisatorischen Änderungsvorschläge stammten überproportional viele Antworten von Schülerinnen (vor allem in „mehr Zeit“ und „präzisere Vorstellungsanweisungen“). Dies steht in deutlichem Gegensatz zum Beurteilungsverhalten der vorformulierten Aussage „Ich möchte mehr Zeit für VÜ und deren Besprechung haben“ (Nr. 16), wo beide Geschlechter etwa gleich (und indifferent) urteilten (siehe Abb. 3.7). Von den wenigen Schülerantworten sind fast die Hälfte Einzelnennungen.[46]

[46] Folgende Antworten von Schülern wurden der Unterkategorie „Verschiedenes“ zugeordnet: *„Nicht morgens früh um 7^{30}“* (Klasse GB 12.2), *„Regelmässiger“* (Klasse GE 11), *„Vielleicht ein bisschen Musik: Man kann sich besser entspannen“* (Klasse GE 11) und *„Ich müsste noch mehr üben mir die Sachen vorstellen zu können“* (Klasse GE 11).

Kategorie	Unterkategorie	total	m	w
***organisatorische* Änderungsvorschläge**	· mehr Zeit	18	2	16
	· weniger Zeit	1		1
	· präzisere Vorstellungsanweisungen	15	4	11
	· klärendere Besprechung	4		4
	· Verschiedenes	4	4	
		42	**10**	**32**
***inhaltliche* Änderungsvorschläge**	· mehr außermathematische Bezüge	6	1	5
	· weniger außermathematische Inhalte	1		1
	· stärkere Herausforderung	6	3	3
	· stärkerer Bezug zum Inhalt des aktuellen Mathematikunterrichts	4	2	2
	· mehr geometrische Inhalte	2	1	1
	· weniger geometrische Inhalte	2	1	1
	· mehr arithmetische Inhalte	1	1	
	· weniger arithmetische Inhalte	2	1	1
		24	**10**	**14**

Tab. 3.6: Änderungsvorschläge der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten

- In der Kategorie der inhaltlichen Änderungsvorschläge wünschten sich besonders die Schülerinnen mehr außermathematische Bezüge. Die Unterkategorien „stärkere Herausforderung“ und „stärkerer Bezug“ wurden von den Schülerinnen und Schülern entsprechend ihres Anzahlverhältnisses genannt, während Wünsche wie „mehr bzw. weniger geometrische bzw. arithmetische Inhalte“ eher von Schülern stammten.

Nr. 23, erste Teilfrage: Die Frage „Wollen Sie weiterhin VÜ machen?“ wird auf allen abgegebenen Fragebogen bis auf eine Ausnahme bejaht.[47] Alle

[47] Der betreffende Schüler äußerte sich moderat ablehnend: *„Ich brauche keine, wenn es aber anderen etwas bringt, finde ich es gut, also können Sie sie weiterhin machen.“* (Schüler, Klasse GE 11).

anderen Schülerinnen und Schüler stimmten der Durchführung mehr oder weniger explizit zu, wie Tabelle 3.7 zeigt.[48]

Kategorie	Unterkategorie	total	m	w
Ablehnung		**1**	**1**	
Zustimmung	· mit genauer zeitlicher Angabe	80	35	45
	· ohne genaue zeitliche Angabe	4	2	2
	· ohne zeitliche Angabe	3	1	2
		87	**38**	**49**

Tab. 3.7: Gewünschte weitere Durchführung von Vorstellungsübungen

Nr. 23, zweite Teilfrage: Von den Schülerinnen und Schülern, die der weiteren Durchführung von Vorstellungsübungen zustimmten, formulierten die meisten eine genaue zeitliche Häufigkeit für die weitere Durchführung.[49] Wie Tabelle 3.8 zeigt, erstreckt sich das Antwortspektrum von „so oft wie möglich" bis „einmal im Monat". Rund die Hälfte der eingegangenen Stimmen wünschte die wöchentliche Durchführung von Vorstellungsübungen. Ein weiteres Viertel wollte alle ein bis zwei Wochen eine Vorstellungsübung, und das restliche Viertel verteilte sich auf Antworten, die für mehr als einmal pro Woche und auf solche, die für weniger als alle zwei Wochen plädierten.[50]

Zu den beiden Gruppen, die Vorstellungsübungen häufiger als einmal oder genau einmal pro Woche wollten, gehörten fast immer überproportional viele Schülerinnen. Umgekehrt sprachen sich überproportional viele Schüler dafür aus, Vorstellungsübungen höchstens einmal pro Woche durchzuführen.

[48] War im Antworttext nur die Häufigkeit der Durchführung angegeben, wurde dies als Zustimmung auf die erste Teilfrage interpretiert.
[49] Einige Befragte gaben keine oder keine explizite Häufigkeit an, so etwa *„[...] vielleicht weniger oft"* (Schülerin, Klasse GB 12.1) oder *„Würde ich gerne, geht aber leider nicht, da ich Ende Semester aus dem Gym austrete"* (Schüler, Klasse GB 10).
[50] Antworten wie die zitierte „so oft wie möglich" wurden mit Hilfe des Stundenplans konkretisiert: Da der entsprechende Schüler dreimal wöchentlich Mathematik-Unterricht hatte, wurde seine Antwort der Kategorie „3 × pro Woche" zugeordnet.

Häufigkeit der Durchführung	total	m	w
· 3 × pro Woche	3	2	1
· 2 × pro Woche	2		2
· 1–2 × pro Woche	5	2	3
· häufiger als 1 × pro Woche	2		2
· 1 × pro Woche	41	15	26
· seltener als 1 × pro Woche	4	4	
· alle 1–2 Wochen	3	2	1
· alle 2 Wochen	15	7	8
· alle 2–3 Wochen	1		1
· alle 3 Wochen	1	1	
· 1–2 × pro Monat	1	1	
· 1 × pro Monat	2	1	1

Tab. 3.8: Gewünschte Häufigkeit der Durchführung von Vorstellungsübungen

Auswahl einzelner Antworten zur Durchführungsakzeptanz: In Entsprechung zu den beiden Kategorien in Tabelle 3.6 werden nun ausgewählte organisatorische und inhaltliche Änderungsvorschläge zitiert.

Organisatorische Änderungsvorschläge: Besonders häufig wünschten sich die Schülerinnen und Schüler, *mehr Zeit* zum Vorstellen oder Besprechen zur Verfügung zu haben:

- *„Vielleicht könnten Sie etwas langsamer voranschreiten während den VÜ, damit sich die Vorstellung besser verfestigen und etwas einprägen kann, dann kann man auch besser damit weiterarbeiten.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„Eigentlich wäre es besser, wenn man ein bisschen mehr Zeit hätte, sich alles vorzustellen. Manchmal geht es zu schnell.“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„mehr Zeit für die Besprechung“* (Schülerin, Klasse GB 11)

Eine Gymnasiastin benötigte jedoch *weniger Zeit*, um die Vorstellungsanweisungen nachzuvollziehen:

- *„zum Teil zu lange Bedenkzeit, [...]“* (Schülerin, Klasse GB 11)

Ein zweiter, ebenfalls häufig genannter organisatorischer Änderungsvorschlag betraf die *präzisere Formulierung* der Vorstellungsanweisungen:

- *„Es gab bei einigen VÜ, dass ich nicht mitkam und es wurde langweilig. Manchmal Vorgehensweise nicht ganz klar formuliert.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„Noch ein wenig klarer das Verlangte ausformulieren / nochmals Gesagtes wiederholen“* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Teilweise müsste die Umgebung bildlicher (besser vorstellbar) beschrieben werden und die Bedingungen genauer genannt werden.“* (Schülerin, Klasse GB 10)

Einige weitere Antworten betrafen weniger die Phase der Vorstellungen als vielmehr die *Besprechung* von Vorstellungsübungen:

- *„Vielleicht bei der Besprechung den Sinn und Zweck der Übung erklären.“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„[...] Anschauungsbeispiel am Ende.“* (Schülerin, Klasse GE 11)

Inhaltliche Änderungsvorschläge: Dieser Kategorie gehören deutlich weniger Antworten an. Eine erste Gruppe von Antworten drehte sich um die Frage, wie sehr in Vorstellungsübungen *außermathematische Themen* (Persönliches oder Alltägliches) angesprochen werden sollten:

- *„Es sollten mehr alltägliche Dinge erwähnt und behandelt werden. Vielleicht sind auch ganz einfache Vorstellungen schwierig.“* (Schüler, Klasse GB 12.1)

- *„Sie müssten mehr mit Farben zu tun haben oder mit der Natur.“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„Wenn sie mir mehr über meine Person Aufschluss geben würden, also irgendwie ‚Psychologisches‘, aber dafür ist wohl der Matheunterricht nicht da!“* (Schülerin, Klasse GB 11)

Allerdings sind die Antworten im Hinblick auf die Frage, wie viel Persönliches in die Vorstellungsübungen eingehen sollte, widersprüchlich.

- *„Keine Fragen nach meinen ‚Gefühlen‘ während der Übung, sondern Konzentration auf das Fachliche.“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Auch wollten einige Personen durch komplexere Vorstellungsübungen *stärker herausgefordert* werden:

- *„Die VÜ könnten sich im Schwierigkeitsgrad steigern“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Es sollte noch ein paar mehr ‚Kniffelfragen‘ geben.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„Nicht zu einfach sollten sie sein. Die Sache mit Unendlich fand ich besonders ansprechend, solche Gedankengänge halten mich flexibel.“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Weitere Befragte wünschten sich einen *stärkeren Bezug* des Inhalts von Vorstellungsübungen zum Inhalt des aktuellen Mathematikunterrichts:

- *„Ich müsste einen tieferen Sinn dahinter erkennen können, damit sie mir für den Unterricht nutzvoll sind. Die Unterschiede Unterricht – VÜ sind zu gross, keine Relation vorhanden“* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Mit dem behandelten Stoff zu tun haben“* (Schülerin, Klasse GB 10)

In einer letzten Gruppe von Schülerinnen und Schülern ließ sich ein Teil eher durch *geometrische*, ein anderer eher durch *arithmetische Vorstellungsinhalte* ansprechen:

- *„Ich habe generell nur an Übungen Interesse, bei welchen ich kopfrechnen kann oder sonstige Zahlenspielereien.“* (Schüler, Klasse GB 12.2)
- *„ev. mehr Dinge die zum Denken anregen als nur Zahlenspielereien.“* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„[...] VÜ ohne Berechungen, mehr mit antastbaren Dingen“* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„weniger mit Körpern [...]“* (Schülerin, Klasse GE 11)

Insgesamt zur Durchführungsakzeptanz: Zusammenfassend ergibt sich für die Forschungsfrage nach der Durchführungsakzeptanz unter allgemeiner und geschlechtstypischer Perspektive *(F1b, c)*:

Die Werte für die Durchführungsakzeptanz sprechen dafür, dass mathematische Vorstellungsübungen auf eine Durchführungsakzeptanz stießen, die weniger hoch war als die Wirkungs- und Einstellungsakzeptanz, da sie sich zwischen verhalten positiver Beurteilung und Indifferenz bewegte. Der Konsens der Beurteilungen dieser drei Items ist gering, teilweise noch geringer als im Fall der beiden anderen Akzeptanzkategorien.

Die befragten Schüler lehnten es verhalten ab, während der Vorstellungsübungen eigenen Gedanken und Bildern nachzugehen, die nichts mit dem Inhalt der aktuellen Vorstellungsübung zu tun hatten. Sie schienen sich Vorstellungsübungen weniger zu entziehen als Schülerinnen, die sich in dieser Frage eher indifferent äußerten. Während die Schülerinnen sich zum Teil etwas mehr Zeit für das Vorstellen und Besprechen wünschten, waren es eher die Schüler, die wollten, dass der Inhalt von Vorstellungsübungen mit dem aktuell behandelten Unterrichtsstoff zu tun hatte. Insgesamt äußerten sich die meisten Befragten in diesen beiden Belangen indifferent, und die diesbezüglichen geschlechtstypischen Unterschiede fielen kaum auf.

Allerdings lehnte bis auf einen Schüler niemand die weitere Durchführung von Vorstellungsübungen ab. Während die Schülerinnen Vorstellungsübungen mindestens einmal pro Woche durchführen wollten, wünschten sich die Schüler eine Durchführungshäufigkeit von höchstens einmal pro Woche.

Die Änderungsvorschläge zur Durchführungsakzeptanz stammten aus dem Bereich der Organisation und der Inhalte. Im Gegensatz zur Beurteilung des gleich lautenden Ankreuz-Items wünschten sich die Gymnasiastinnen insbesondere mehr Zeit. Von ihnen wurde nicht nur der Wunsch nach präziseren Vorstellungsanweisungen besonders oft genannt, sondern auch der Wunsch nach außermathematischen Bezügen von Vorstellungsübungen. Konkrete inhaltliche Änderungsvorschläge stammten eher von Schülern.

3.3 Fazit

Die Befragung der fünf Klassen bestätigt meine eigenen positiven Erfahrungen mit Vorstellungsübungen und ermöglicht einen differenzierteren Blick. Selbst wenn in Rechnung gestellt wird, dass es sich bei den Aussagen um Selbsteinschätzungen handelt, bei deren Interpretation wegen des Abhängigkeitsverhältnisses der Befragten von mir als dem Lehrer und Fragenden Vorsicht angebracht ist, ergibt sich als Fazit, dass Vorstellungsübungen *sich nicht nur aus meiner eigenen Sicht, sondern auch aus der Sicht der befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten für den Mathematikunterricht eignen und lohnen.*

Bei der deutlichen Mehrheit der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten erfreuten sich mathematische Vorstellungsübungen einer hohen Einstellungs- und etwas weniger hohen Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz. Die befragten Klassen machten Vorstellungsübungen nicht nur gerne, sondern wollten sie im Mathematikunterricht regelmäßig durchgeführt haben. Auch ließen sie sich von Vorstellungsübungen eher ansprechen als vom normalen Mathematikunterricht, weshalb sie sich dezidiert gegen die These aussprachen, es würde Unterrichtszeit weggenommen. Sie gaben an, Neues über Mathematik zu erfahren, und schrieben den Vorstellungsübungen vielfältige kognitive und einige emotionale Wirkungen zu. All diese Einschätzungen wurden nach einem Dutzend und mehr Vorstellungsübungen vorgenommen, so dass sie kaum durch den ‚Reiz des Neuen‘ zustande gekommen sein dürften.

Meine Beobachtung, dass sich die Schülerinnen in Vorstellungsübungen tendenziell stärker engagierten als die Schüler, wurde in der Befragung ebenfalls bestätigt. So beurteilten die Schülerinnen die meisten Behauptungen des Fragebogens etwas positiver als die Schüler. Allerdings schienen die Schüler das Unterrichtsinstrument nicht anders oder weniger zu nutzen als die Schülerinnen, mindestens in kognitiver und fachlicher Hinsicht. Bezüglich emotionaler Wirkungen schwiegen sich die Schüler jedoch eher aus. Auch waren sie weniger bereit, konstruktive Änderungsvorschläge zu formulieren, die zu einer höheren Akzeptanz hätten führen können. Ihre entsprechenden Vorschläge betrafen eher inhaltliche Anregungen. Nur ein Schüler lehnte Vorstellungsübungen klar ab.

Der hier vorliegende Befund steht im Gegensatz dazu, dass Schülerinnen in vielen empirischen Studien dem Mathematikunterricht gegenüber negativere Einstellungen formulieren als die Schüler. Selbst wenn in Rechnung gestellt wird, dass die Schülerinnen eher im Sinne des Lehrers geantwortet haben könnten als die Schüler, ist zumindest festzuhalten, dass *die befragten Gymnasiastinnen das Unterrichtsinstrument nicht weniger akzeptierten als die Gymnasiasten.* Damit scheint mein gleichlautender subjektiver Eindruck nicht durch die Drittel-Paritäts-Regel entstanden zu sein. Es könnte also sein, dass der Einfluss des Geschlechts auf akzeptanzbezogene Einschätzungen mathematischer Vorstellungsübungen in den befragten Klassen geringer ist als etwa auf das Interesse am Unterrichtsfach oder auf die mathematische Leistung. Diese Hypothese und alle Fragen, die sich daran anschließen, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch nicht untersucht.[51]

Mit diesem Fazit endet die Phase der Beobachtung und Informationssammlung. Die Schülerantworten werden im weiteren Verlauf der Arbeit noch einmal aufgegriffen. In Abschnitt 5.3 werden einige Antworten zur Wirkung von Vorstellungsübungen herangezogen, um erwartete Effekte von Vorstellungsübungen zu begründen. Die von den Befragten vorgeschlagenen Durchführungsänderungen und genannten problematischen Punkte des Unterrichtsinstruments werden bei seiner Modifikation in Kapitel 6 berücksichtigt.

[51] So stellt sich die Frage, ob Vorstellungsübungen den Bedürfnissen beider Geschlechter gerecht werden und damit einen „geschlechtergerechten" Mathematikunterricht ermöglichen. Für entsprechende Kriterien siehe [Jahnke-Klein 2001] und [Jahnke-Klein 2004].

4 Vorstellen und Vorstellungen in der Mathematikdidaktik

In diesem Kapitel wird ein tragfähiges Begriffsverständnis von Vorstellen und Vorstellungen entwickelt, um das Unterrichtsinstrument mathematischer Vorstellungsübungen genauer beschreiben und in Kapitel 5 analysieren zu können. Dazu werden Theorien und Prinzipien aus der Mathematikdidaktik herangezogen, in denen Vorstellen und Vorstellungen für gedankliche Prozesse eine ausgezeichnete Rolle spielen. Um diese Theorien in Kapitel 6 hinsichtlich des Ausbaus der Unterrichtsumgebung nutzen zu können, wird hier ebenfalls schon beschrieben, wie gemäß dieser Vorgaben im Unterricht mit Vorstellungen gearbeitet wird.

Damit untersteht dieses Kapitel folgenden aufgegliederten Forschungsfragen (S. 11):

(F2a) Auf welchem Begriffsverständnis von Vorstellung basiert das Unterrichtsinstrument?

(F2b) Welche Bezüge zu mathematikdidaktischen Prinzipien weist es auf?

(F2c) Welches pädagogische Ziel verfolgt das Unterrichtsinstrument? Welche mathematikdidaktische Unterrichtskonzepte verfolgen ein ähnliches Ziel?

Mit anderen Worten werden mathematische Vorstellungsübungen in diesem Kapitel vor dem Hintergrund naheliegender mathematikdidaktischer Konzepte positioniert, von wo aus der Vorstellungsbegriff im Hinblick auf das Unterrichtsinstrument bestimmt wird.

4.1 Denken als gedankliches Handeln

Die Auffassung, dass kognitive Leistungen wie deduktives Denken, Problemlösen oder Begriffsbildung mit *gedanklichem Handeln* in Verbindung stehen, wurde im zwanzigsten Jahrhundert mehrfach formuliert und Lern- und Unterrichtstheorien immer wieder zugrunde gelegt. Darüber versucht dieser Abschnitt einen Überblick zu geben. In seinem Verlauf werden sich bestimmte

Positionen herauskristallisieren, an die das Unterrichtsinstrument mathematischer Vorstellungsübungen anschließt.

Verbindungspunkt ist das „operative Prinzip“ von Wittmann. Es gibt wieder, wie mathematische Lern- und Erkenntnisprozesse initiiert werden können und organisiert sein müssen. Bezüge des operativen Prinzips zu Theorien des Entwicklungspsychologen Piaget und des Didaktikers Aebli, zu Theorien des sowjetischen pädagogischen Psychologen und Lerntheoretikers Galperin sowie zur Tradition des beweglichen Denkens werden so weit erläutert, wie sie für mathematische Vorstellungsübungen von Belang sind.

4.1.1 Das „operative Prinzip“ von Wittmann

Erich Christian Wittmann hat das *operative Prinzip* für den Mathematikunterricht formuliert. In seinem 1974 erstmals erschienenen Buch *Grundfragen des Mathematikunterrichts* fordert er von Lehrerinnen und Lehrern,

> „[...] die jeweils untersuchten Objekte und das System (‚Gruppierung‘) der an ihnen ausführbaren Operationen deutlich werden zu lassen und die Schüler auf das Verhalten der Eigenschaften, Beziehungen und Funktionen der Objekte bei den transformierenden Operationen gemäß der Frage ‚Was geschieht mit ..., wenn ...?‘ hinzulenken.“ [Wittmann 1981 a, S. 79]

Im 1985 erschienenen Themenheft der Zeitschrift *Mathematik lehren* präzisiert er das operative Prinzip wie folgt:

> „Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muß man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise
>
> (1) untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
>
> (2) herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,
>
> (3) beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (Was geschieht mit ..., wenn ...?)“ [Wittmann 1985, S. 9]

Das operative Prinzip hebt weniger die Art der im Unterricht eingesetzten Objekte – „konkrete Medien, zeichnerische Darstellungen und Textmaterialien“ – als vielmehr die an ihnen ausgeführten Aktivitäten – „real oder gedanklich operieren und ‚forschen'" – hervor. Wittmann äußert sich im oben zitierten Passus zur Natur der Objekte ganz bewusst nicht ausführlicher. „Daher erstreckt sich das operative Prinzip von materiellen oder konkret dargestellten Objekten über abstrakte Objekte, strukturierte Mengen bis hinauf zu ‚Kategorien' von Strukturen." [Wittmann 1985, S. 9] Objekten, die sich nur betrachten lassen und an denen nicht gehandelt werden kann, spricht Wittmann den didaktischen Wert gänzlich ab. „Primär wichtig sind die an ihnen ausgeführten Aktivitäten." [Wittmann 1981 a, S. 79]

Mit seinem didaktischen Prinzip bezieht sich Wittmann nicht nur begrifflich („Operation", „Gruppierung"), sondern auch epistemologisch auf Piaget und Aebli.[1] Nach Auffassung dieser beiden Forscher wirkt das Subjekt durch seine Handlungen aktiv auf Gegenstände ein, beobachtet die Wirkungen seiner Handlungen und gewinnt dadurch Erkenntnisse.[2] Entsprechend zielt das operative Prinzip in seiner ursprünglichen, engeren Fassung auf ausführbare Operationen und deren Studium zum Zweck der Systematisierung.[3]

Was das operative Prinzip für die Auswahl, die Anordnung und die Darbietung von Unterrichtsstoff heißt, verdeutlicht Wittmann im bereits erwähnten Themenheft durch mehrere „Spezialfälle". Dort finden sich nicht nur seine eigenen Interpretationen, sondern auch die anderer Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker unter dem operativen Prinzip versammelt. Im Zusammenhang mit den Vorstellungsübungen sind folgende Spezialfälle des operativen Prinzips von Bedeutung:

1. *„Funktionales Denken"*: Wittmann versteht unter funktionalem Denken die Untersuchung, wie sich eine Variation der Argumente einer Funktion auf die Funktionswerte auswirkt, womit er sich an den Funktionsbegriff von Dirichlet anlehnt.[4] Allerdings liegt den meisten der im gleichen Heft

[1] Diese und alle weiteren Bezüge des operativen Prinzips sind in Abb. 4.1 (S. 87) schematisch dargestellt. Umgekehrt hat Piaget mit seinen zentralen Begriffen „Operation" und „Gruppierung" Anleihe bei der Mathematik genommen (siehe [Piaget 1966, S. 49], [Aebli 1980, S. 234 f.] und [Aebli 1983, S. 203 f.]).

[2] Ausführliches dazu im ersten Exkurs (S. 90 ff.).

[3] Während die Systematisierung bei Piaget zentral ist – er sieht sie als „Gruppierung" in Anlehnung an den mathematischen Gruppenbegriff –, schlägt Aebli vor, „Ballast abzuwerfen" und auf die Forderung nach Systematisierung zu verzichten. [Aebli 1980, S. 245]

[4] Nach Dirichlet kann von einer „Funktion y von x" gesprochen werden, „wenn dem Wert der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Wert von y entspricht [...]" [Krüger 2000 a, S. 50]. Damit wird der *Zuordnungscharakter* von Funktionen hervorgehoben und nicht etwa das lokale *Änderungsverhalten*. Für die Geschichte des Funktionsbegriffs siehe [Hischer 2002].

veröffentlichten Beispiele ein *erweitertes* Verständnis funktionalen Denkens zugrunde. Solches Denken ist flexibler und betont *Beweglichkeit*, nicht Systematisierung. Wohl deshalb ergänzt Wittmann seine Begriffserläuterung durch einen Hinweis auf die Meraner Reform.[5]

2. „*Operative (konstruktive) Begriffsbildung*: Ein Begriff wird nach dieser Methode dadurch erschlossen, daß man ein Verfahren zur Konstruktion der unter diesen Begriff fallenden Objekte angibt und die diesen Objekten durch die Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften untersucht."

3. „*Operative Beweise*: Beweise, bei denen die den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden [...]." [Wittmann 1985, S. 11, Hervorhebungen im Original][6]

Wittmann stützt sich in der Begründung seines didaktischen Prinzips inhaltlich und begrifflich stark auf die denk- und lernpsychologischen Arbeiten von Piaget und Aebli, er stellt aber auch Bezüge zu Galperin her. Mit seinem Plädoyer für funktionales Denken bezieht sich Wittmann darüber hinaus auf die Meraner Reform um Klein. Für eine schematische Darstellung dieser Bezüge siehe Abbildung 4.1 (Linien zwischen den Kästen stehen für inhaltliche Bezüge zwischen den entsprechenden Ansätzen).

Obwohl Wittmann funktionales Denken *neben* operative Begriffsbildungen und Beweise stellt, unterscheiden sich die beiden letzten didaktischen Umsetzungen des operativen Prinzips stark von funktionalem Denken. Während es sich bei funktionalem Denken um einen denkpsychologischen Aspekt handelt, erfassen Spezialfälle wie das Bilden von Begriffen und das Führen heuristischer Beweise mathematikdidaktische Absichten, die sich ohne weiteres mit funktionalem Denken *kombinieren* lassen.

Da sich das Themenheft an Mathematiklehrkräfte richtet, finden sich neben theoretischen Ausführungen eine große Fülle an *Beispielen*, wie mathematischer Stoff aufgrund des operativen Prinzip aufbereitet und dargeboten werden kann. Hier gerade wird die Kombination von operativen Beweisen und Begriffsbildungen mit funktionalem Denken deutlich. Dazu einige Beispiele:[7]

[5] Viele Beispiele zum operativen Prinzip stammen von Führer mit seinem auf die Meraner Reform zurückgehenden Begriffsverständnis von funktionalem Denken [Führer 1985, S. 12 f.]. Ausführliches dazu in Abschnitt 4.1.2 (S. 98 ff.).

[6] Die beiden weiteren von Wittmann aufgeführten Spezialfälle lassen sich nicht mit Vorstellungsübungen in Beziehung bringen und werden hier deshalb nicht genannt.

[7] Sie werden sich als für Vorstellungsübungen bedeutsam erweisen, Genaueres siehe in Abschnitt 5.2 (S. 137 ff.).

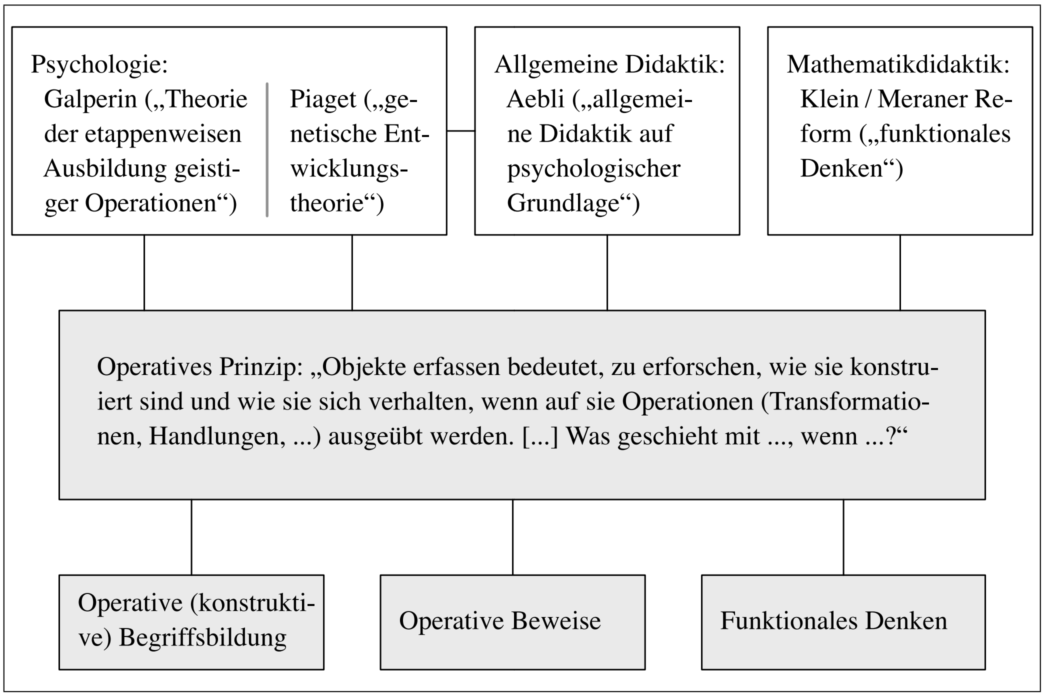

Abb. 4.1: Bezugsschema des operativen Prinzips bei Wittmann

- In *„Scharen von Kreisen“* wird ein Kreis gezeigt, der wächst und nacheinander an drei festen Punkten hängen bleibt: „In der Ebene erscheinen drei feste Punkte. Ein Kreis zirkuliert völlig frei. [...] Scheinbar zufällig trifft die Peripherie mit einem der Punkte zusammen. Der Kreis ist weniger frei als zuvor. Er schwankt, sein Radius wächst, so daß ein zweiter Punkt mit einem Punkt der Peripherie zusammenfällt. [...] Sein Radius kann noch wachsen. Sein Mittelpunkt verlagert sich als Funktion der Variation des Radius auf einer Gerade. Schließlich geht der Kreis durch den dritten Punkt.“ [Wittmann 1985, S. 9] Diese Visualisierung macht plausibel, dass die Lage und Größe eines Kreises durch drei Punkte festgelegt ist. Obwohl die Szenen im Themenheft nicht weiter kommentiert werden, wird in diesem Beispiel funktional-bewegliches Denken mit operativer Beweisführung kombiniert.[8]

- *„Winkelsumme im Dreieck“*: Ein weiteres Beispiel eines operativen Beweises zeigt eine Folie, auf der ein Dreieck abgebildet ist. In den Mit-

[8] Dieses Beispiel bezieht sich auf den Film „Circles and Points“ (1977) von Nicolet, dessen Filme – wie die Cuisenaire-Stäbchen – von Gattegno vertrieben wurden (mehr dazu unter `http://assoc.wanadoo.fr/une.education.pour.demain/biographies/cuisef.htm`). Wittmann analysiert den Film ausführlich in [Wittmann 1987].

telpunkten zweier verschiedener Seiten des Dreiecks sind Druckknöpfe angebracht. Zwei weitere entsprechend präparierte Folien sind mit der ersten Folie durch je einen Druckknopf verbunden. Durch 180°-Drehung dieser beiden Folien um den Druckknopf-Mittelpunkt entsteht der „Anfang eines Parallelstreifens". Dieser operative Beweis veranschaulicht unter Einsatz funktional-beweglichen Denkens, dass die Summe der Winkel im Dreieck gleich einem gestreckten Winkel ist. [Ebd., S. 10]

- Im Beispiel *„Rotation"* wird ein Flächenstück ins Auge gefasst, das unter einem Stück des rechten Asts der Normalparabel liegt und links vom Ursprung abgeschlossen wird. Es wird gefragt, was für ein Körper entsteht, wenn dieses Flächenstück zuerst um die x-Achse und anschließend um die y-Achse rotiert wird. Dieses Beispiel nutzt funktionales Denken, um ein neues geometrisches Objekt aufzubauen und fällt damit unter den Spezialfall der operativ-konstruktiven Begriffsbildung.[9] [Ebd., S. 28]

- *„Kippbewegungen"*: Ein ähnliches Beispiel ist unter „operative Übungen zur Geometrie" angegeben. Darin geht es um die Frage, wie die Bahn des Eckpunkts eines auf einer Geraden abrollenden Quadrats beziehungsweise regelmäßigen Sechsecks aussieht. [Ebd., S. 27, 34]

- *„Eine merkwürdige Rechnung mit Brüchen"*: Als Beispiel einer „operativen Übung zum Bruchrechnen" wird gefragt, was mit der von zwei beliebigen rationalen Zahlen a_1 und a_2 ausgehenden, nach der Vorschrift $a_{n+2} := \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gebildeten Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ langfristig passiert.[10] Mit seinem arithmetisch-algebraischen Inhalt tanzt dieses Beispiel aus der Liste der bereits erwähnten geometrischen Beispiele. In ihm kommt funktionales Denken – allerdings in Wittmanns eher mathematischem Sinne – zum Zuge. Inhaltlich dürfte es propädeutisch um die Zyklizität gehen, die aufgrund des Bildungsgesetzes keineswegs offensichtlich ist. Damit wird ein Objekt, das unter einen Fachbegriff fällt, durch ein Verfahren konstruiert, weshalb sich auch dieses Beispiel unter den Spezialfall der operativ-konstruktiven Begriffsbildung subsumieren lässt. Das operative Prinzip lässt sich nach Wittmann – denn

[9] Durch die Rotation der rechten Berandung des Flächenstücks um die x-Achse entsteht ein Kreis und durch dessen Rotation um die y-Achse wiederum eine Kugelschicht mit zwei symmetrisch zueinander liegenden, parabolischen Ausbohrungen. Siehe auch die Fußnote auf S. 148.

[10] Die Folge *wiederholt* sich nach jeweils fünf Rechenschritten, $a_{n+5} = a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

von ihm stammt das Beispiel – also auch auf nichtgeometrische Inhalte anwenden.[11] [Ebd., S. 28, 36]

Hinter all diesen Beispielen steht nicht so sehr die Haltung „So geht's!“ als vielmehr die Frage „Was passiert mit ..., wenn ...?“, die Grundfrage des operativen Prinzips, und in allen Beispielen kommt funktionales Denken zum Einsatz. Damit ist funktionales Denken nicht einfach ein Spezialfall des operativen Prinzips (wie Wittmann angibt), sondern *funktionales Denken scheint sich zur operativ-konstruktiven Begriffsbildung bzw. zur operativen Beweisführung besonders zu eignen.* Diese Kombination verschiedener Spezialfälle wird in Tabelle 4.1 dargestellt. Sie wird bei der Analyse von Vorstellungsübungen von Bedeutung sein.[12]

Operatives Prinzip	**Funktionales Denken**
Operative Beweise	· „Scharen von Kreisen“ (mathematischer Film) · „Winkelsumme im Dreieck“ (Drehfolien)
Operative (konstruktive) Begriffsbildung	· „Rotation“ · „Kippbewegungen“ · „Eine merkwürdige Rechnung mit Brüchen“

Tab. 4.1: Beispiele des operativen Prinzips, in denen funktionales Denken mit operativen Beweisen bzw. Begriffsbildung kombiniert ist

Zum besseren Verständnis des operativen Prinzips werden nun in zwei Exkursen denkpsychologische Ansätze referiert, auf die sich Wittmann explizit bezieht. Als Erstes folgt ein Exkurs zu Piagets Theorie der Entwicklung kognitiver Fähigkeiten.

[11] Wittmanns besonderes Interesse für nichtgeometrische Inhalte lässt sich bis hin zum Projekt „mathe 2000“ verfolgen, in welchem das operative Prinzip im *aktiv-entdeckenden Prinzip* aufgeht. [Müller et al. 1997]
[12] Ausführliches dazu im Abschnitt 5.2 (S. 137 ff.).

Erster Exkurs: Die „genetische Entwicklungspsychologie“ und das „verinnerlichte Handeln“ bei Piaget

Jean Piagets Forschungsinteresse gilt der Entwicklung kognitiver Fähigkeiten im Kindes- und Jugendalter. Er geht davon aus, dass sich Individuen kognitiv entwickeln, indem sie handeln und sich aktiv mit der Umwelt auseinandersetzen. Dabei erzielen sie Erfolge und Misserfolge, die sie mit ihrem bestehenden Wissen in Wechselwirkung bringen. Für Piaget bildet nicht die Wahrnehmung oder Sprache, sondern die „Handlungsaktivität die Quelle und Basis der Wissens- und Intelligenzentwicklung“ [Reusser 1998, S. 119].

Dabei ist die Fähigkeit des Erkennens nicht per se vorhanden, sondern sie entwickelt sich. Auf der Grundlage von Experimenten mit Kindern aller Altersstufen postulieren Piaget und seine Mitarbeiter, dass die kognitive Entwicklung in vier aufeinanderfolgenden Stadien vom Säuglings- bis ins Erwachsenenalter verläuft. Diese Stadientheorie ist längst zum Standardwissen geworden und stellt sich aus heutiger Lehrbuchsicht folgendermaßen dar:

1. *sensumotorisches Stadium* (bis zu einem Alter von zwei Jahren): „Die wichtigste kognitive Funktion, die während dieser Zeit erworben wird, ist die Fähigkeit, mentale Repräsentationen von nicht vorhandenen Objekten – mit denen das Kind nicht in direktem sensumotorischem Kontakt steht – auszubilden.“

2. *voroperativ-anschauliches Stadium* (zwei bis sieben Jahre): „Der große kognitive Fortschritt auf dieser Entwicklungsstufe ist die verbesserte Fähigkeit zur mentalen Repräsentation von physikalisch nicht vorhandenen Objekten.“

3. *konkret-operatives Stadium* (sieben bis elf Jahre): „In diesem Stadium ist das Kind schon zu mentalen Operationen in der Lage, das sind Handlungen, die im Geist ausgeführt werden und zur Entwicklung des logischen Denkens führen.“

4. *formal-operatives Stadium* (von elf oder zwölf Jahren an): „In diesem letzten Stadium der kognitiven Entwicklung wird das Denken abstrakt. Adoleszenten sind in der Lage zu erkennen, dass ihre Realität nur eine von mehreren vorstellbaren Realitäten ist [...].“ [Zimbardo 2004, S. 453 ff.]

Verkürzt dargestellt lernen Menschen im Laufe ihrer kognitiven Entwicklung zunehmend, über nicht vorhandene Objekten zu verfügen und mit ihnen gedanklich zu handeln.[13] Im letzten Entwicklungsstadium können sie jedoch nicht nur über konkretes Material hinausgehen, sie verfügen auch über eine gewisse Fähigkeit zur *Introspektion*.[14] Vorstellungsübungen stützen sich gerade auch auf letztgenannte Fähigkeit, geht es in ihnen doch unter anderem auch darum, die eigenen Vorstellungen zu beobachten (siehe S. 17).

Wenn auch heute davon ausgegangen wird, dass die vier Stadien im Hinblick auf das Alter nicht streng festgeschrieben sind und sich ohne weiteres auch überlappen können, behält Piagets Theorie im Großen und Ganzen ihre Gültigkeit – sie ist und „bleibt der klassische Bezugspunkt für das Verständnis der kognitiven Entwicklung“ [Zimbardo & Gerrig 2004, S. 456].[15] Da konkrete Handlungen erst im letzten, formal-operatorischen Stadium sprachlich gefasst werden können, lässt sich die Stadientheorie im Dreischritt *Handeln – Denken – Sprechen* zusammenfassen.[16]

Nach Piaget werden kognitive Strukturen in der handelnden Auseinandersetzung mit Problemen entwickelt. Dies passiert nicht nur durch bloßes Handeln, sondern durch die „Verinnerlichung“ von Handlungen. Denken, das heißt „mentale Operationen“, sind eben „Handlungen, die im Geist ausgeführt werden“. Wie beispielsweise arithmetisches Denken mit verinnerlichtem Handeln zusammenhängt, beschreibt Piaget in seiner *Psychologie der Intelligenz* wie folgt:

> „In irgendeinem Ausdruck, zum Beispiel $(x^2 + y = z - u)$, bezeichnet jedes Glied letzten Endes eine Handlung: das Zeichen $=$ drückt die Möglichkeit einer Substitution aus, das Zeichen $+$ eine Verbindung, das Zeichen $-$ eine Trennung, das Quadrat x^2 die x-malige Erzeugung von x und jeder der Werte u, x, y und z die Handlung, eine bestimmte Anzahl von Malen die Einheit zu reproduzieren. Jedes dieser Symbole bezieht sich also auf eine Handlung, die wirklich sein könnte, von der mathematischen Sprache aber nur abstrakt, als verinnerlichte Tätigkeit, d. h. als Operation des Denkens bezeichnet wird. [...] Kurz: der

[13] Piaget hatte einzig die Entwicklung *mathematisch-naturwissenschaftlichen* Denkens im Auge. [Reusser 1998, S. 118]
[14] Auf diese Implikation wird in [Weinert 1996, S. 35] hingewiesen.
[15] Mit Autoren wie [Helmke & Weinert 1997, S. 103] ist davon auszugehen, dass das Lebensalter für den Stand der kognitiven Entwicklung nur einer von mehreren Indikatoren ist, der zudem prädikativ mäßig valide ist. Für einen Überblick über die Kritik an Piaget siehe [Reusser 1998, S. 125 ff.], für Kritik an Piaget aus mathematikdidaktischer Sicht siehe [Freudenthal 1991, S. 138 ff.].
[16] Siehe [Reusser 1998, S. 121].

> wesentliche Charakter des logischen Denkens besteht darin, daß es operativ ist, d. h. aus dem Tun hervorgeht, indem es dieses verinnerlicht.“ [Piaget 1966, S. 38 und 40][17]

Neben einem Zahlenverständnis, welches in seinem Anzahlcharakter nicht über das der natürlichen Zahlen hinausgeht, kommt hier Piagets Überzeugung zum Ausdruck, Denken beruhe auf Handeln, *Denken sei verinnerlichtes Handeln.* Sie ist eine entscheidende Grundannahme, von der auch diese Arbeit ausgeht.[18]

Piagets ganzes Forscherinteresse gilt der Aufdeckung *bereits im Menschen angelegter Strukturen* und nicht Einflüssen, die interaktive Prozesse zwischen Mensch und Umwelt auf die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten haben. Eine solche Entwicklung sei ein natürlich-biologischer, von außen im Wesentlichen nicht beeinflussbarer Reifungsprozess. „Eine befriedigende Antwort auf die Frage, wie der Mensch ein Weltbild, das Wissen und die kognitiven Werte seiner Kultur erwirbt und wie er dadurch entwicklungsmäßig geprägt und sozialisiert wird, ist von einer solchen Theorie nicht zu erwarten.“ [Reusser 1998, S. 128] Entsprechend gilt der Nichtberücksichtigung soziokultureller Faktoren eine der großen Kontroversen um Piaget.[19]

Erst Piagets Schüler Hans Aebli vertrat die Meinung, der Aufbau kognitiver Strukturen könne durch geeignete Maßnahmen von außen quasi induziert werden und entwickelte aus Piagets psychologischen Ergebnissen eine didaktische Theorie. In seinem Aufsatz *Das operative Prinzip* aus dem bereits mehrfach zitierten Themenheft schreibt er: „Piagets Deutung der Entwicklung kann lernpsychologisch und damit auch didaktisch interpretiert werden, wenn man auf die Annahme einer spontanen Entwicklung verzichtet und an ihrer Stelle annimmt, daß die Schule Bedingungen herstellen kann, die die kindliche Aktivität anregen und steuern [...]“ [Aebli 1985, S. 4]. Weiter führt Aebli aus, wie allgemeine Handlungen – im Sinne des operativen Prinzips –

[17] Inwiefern für Piaget verinnerlichte Handlungen auch im Bereich geometrischen Denkens oder der Zahlbegriffsbildung grundlegend ist, wird in [Aebli 1963, S. 53–62] beschrieben.

[18] Damit nimmt Piaget eine radikal andere Haltung ein als etwa die Gestaltpsychologen um Wertheimer, die Denken und Verstehen vielmehr an *Wahrnehmung* anlehnen, wenn sie von „innerem Sehen“ und „Einsicht“ sprechen. Zu Stärken und Schwächen dieser Auffassung sowie zur Frage, inwiefern operative und gestaltpsychologische Konzeptionen des Denkens und Verstehens sich gegenseitig ergänzen, siehe [Aeschbacher 1986, S. 71, 93 ff., 106 ff.].

[19] Eine Folge davon ist die Renaissance soziokultureller Ansätze in der Entwicklungs- und Lernpsychologie, die sich unter anderem auf Theorien von Vygotskij beruft (siehe [Reusser 1998, S. 154–156] und [Zimbardo & Gerrig 2004, S. 459]).

verinnerlicht und automatisiert werden können.[20] Damit bezieht er sich weniger auf die Stadientheorie Piagets als vielmehr auf dessen psychologische Grundannahme, Denken sei verinnerlichtes Handeln, und nutzt sie für seine allgemeine Didaktik.[21]

Dass Aeblis und Piagets Theorien von Mathematikdidaktikern wie Wittmann rezipiert wurden, mag unter anderem darin begründet sein, dass beide nicht nur wie erwähnt begrifflich-konzeptuelle Anleihen bei der Mathematik nehmen, sondern darüber hinaus eine stark mathematisch-naturwissenschaftlich geprägte Auffassung von Können und Wissen haben. So nennt Wittmann in *Grundfragen des Mathematikunterrichts* mehrere – spätestens seit der Reformpädagogik bekannte – didaktische Prinzipien für einen Mathematikunterricht, denen er Piagets Sicht des Lernens legitimierend zugrunde legt. Von diesen didaktischen Forderungen sind – neben dem bereits erläuterten operativen Prinzip – drei weitere für die Vorstellungsübungen von Bedeutung:

- Als erstes didaktisches Prinzip führt Wittmann das des „aktiven Lernens“ an: „*Der Unterricht hat an der vorliegenden Struktur des Lernenden anzusetzen.* [...] Der Lehrer sollte sich im Klaren darüber sein, dass seine Instruktion wirkungslos bleibt, wenn sie nicht durch eine aktive Konstruktion seitens des Schülers ergänzt wird.“ [Wittmann 1981 a, S. 77, Hervorhebung im Original][22]

- An vorhandenen Strukturen der Lernenden anzuknüpfen heißt auch, anschaulich zu unterrichten. Die „Forderung nach Anschaulichkeit“ formuliert Wittmann so: „*Eine Konfrontation der Schüler mit neuen Inhalten oder neuen Fragestellungen soll über Situationen erfolgen, bei denen nur einzelne Elemente oder Aspekte wirklich neu sind, ansonsten aber möglichst reichhaltige Ansatzpunkte für eine Anwendung bekannter Schemata vorliegen.*“ [Ebd., S. 78, Hervorhebung im Original][23]

[20] Ausführlich geht Aebli darauf im Kapitel „Eine Operation aufbauen“ seines Lehrbuchs *Zwölf Grundformen des Lehrens* ein. Unter anderem beschreibt er darin, dass das Aufbauen von Operationen der Erarbeitung von Handlungsabläufen folgt und der Bildung von Begriffen vorangeht. [Aebli 1983, Kapitel 8]

[21] Siehe auch Aeblis Titel *Denken, das Ordnen des Tuns* [Aebli 1980 und 1981].

[22] Inwiefern Vorstellungsübungen diesem Prinzip nachkommen, wird im Abschnitt 5.1 (S. 133 ff.) diskutiert.

[23] Im Kontext des operativen Prinzips heißt anschauliches Unterrichten weniger die Darbietung von visuellen Veranschaulichungsmitteln oder „Siehe“-Beweisen als vielmehr gedankliches Operieren, worauf [Klieme 1987, S. 58] und [Einsiedler 1996, S. 177] hinweisen. Zur Rolle der Anschaulichkeit für Vorstellungsübungen siehe Abschnitt 6.1.1 (S. 217 f.).

- Nach Piaget hängt der Komplexitätsgrad, den ein Inhalt besitzen darf, um von Schülerinnen und Schülern überhaupt behandelt und verstanden werden zu können, von ihrem kognitiven Entwicklungsstadium ab. Obwohl Wittmann einräumt, dass die „Forderung nach Stufengemäßheit“ umstritten sei, weist auch er auf Grenzen individuellen Denkens und Lernens hin: „Durch Instruktion können zwar Einzelerfahrungen vermittelt werden; die fundamentalen intellektuellen Strukturen werden aber nicht durch Einzelerfahrungen verändert, sondern durch einen Reorganisationsprozeß, der vom Kind selbst durchgeführt werden muß. Dem Lernfortschritt sind daher durch die Eigenheiten des jeweiligen Entwicklungsstadiums Grenzen gesetzt.“ [Ebd., S. 81 f.][24]

Wittmann erwähnt als eine seiner lernpsychologischen Referenzen auch Galperins Lerntheorie. In seinen *Grundfragen des Mathematikunterrichts* nennt er Teile von ihr die „instruktionsorientierte Fassung von Elementen der Piaget'schen Theorie“ und geht kurz auf sie ein [Wittmann 1981 a, S. 112–114]. Da Galperin noch konsequenter als Piaget und Aebli von der Bedeutung von Handlungen für die kognitive Entwicklung ausgeht, seine Theorie jedoch in der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur kaum noch erwähnt wird, erläutere ich sie im folgenden zweiten Exkurs anhand von Originalarbeiten.

Zweiter Exkurs: Die „etappenweise Ausbildung geistiger Operationen“ nach Galperin

Auf der Grundlage eines weniger biologisch-darwinistischen als vielmehr materialistischen Weltbildes beschäftigten sich ungefähr zur gleichen Zeit wie Piaget sowjetische Psychologen wie Vygotskij, Leontjev, Lurija und Galperin mit der Rolle von sozialen Interaktionen und ihrem Einfluss auf die kognitive Entwicklung. Damit ging ihre so genannte „kulturhistorische Schule“ dieselbe Fragestellung wie Piaget an, wenn auch aus einer ganz anderen Richtung. So formuliert Pjotr Jakowlewitsch Galperin[25] in seinem Aufsatz *Die Entwicklung der Untersuchungen über die Bildung geistiger Operationen*, „dass die Grundstruktur des gesellschaftlichen Lebens auch die Grundstruktur der menschlichen Psyche bestimmen muß“ [Galperin 1969, S. 367].[26]

[24] Diese Grenze wird im Zusammenhang mit Vorstellungsschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern aufgegriffen und diskutiert, siehe Abschnitt 6.2.1 (219 ff.).
[25] Für eine Kurz-Biographie Galperins siehe [Vygotskij 2002, S. 570], eine ausführliche Biographie siehe unter `http://www.psy.msu.ru/people/galperin.html` (auf Russisch).
[26] Damit wird Marx' These, dass das gesellschaftliche Sein das Bewusstsein bestimmt, in die Psychologie übertragen. [Marx & Engels 1961, S. 9; Marx & Engels 1969, S. 27]

Wie schon der Titel des Aufsatzes verrät, interessierte sich auch Galperin für „psychische Tätigkeiten und ihre konkreten Inhalte“ [Galperin 1969, S. 396]. Auch er scheint dabei – mindestens zum Zeitpunkt der Entwicklung seiner Theorie – in erster Linie mathematisch-logische Tätigkeiten wie das Lösen von Problemen [ebd., S. 376], den Erwerb von Fähigkeiten wie Kopfrechnen [ebd., S. 381] oder Begriffsbildung [ebd., S. 376, 381, 386] im Blick gehabt zu haben. Galperin war der Ansicht, dass „nur die reale Tätigkeit des Kindes, die immer sinnvolle Tätigkeit ist, sowohl seine psychische Gesamtentwicklung als auch den Verlauf der einzelnen psychischen Prozesse bestimmt“ [ebd., S. 369]. Kinder würden ihr Wissen und ihre kognitiven Fähigkeiten in einem Prozess der Verinnerlichung ihrer realen Handlungen entwickeln, „die psychische Tätigkeit [ist] das Ergebnis der Übertragung des äußeren materiellen Handelns [...] in die Form der Wahrnehmungen, der Vorstellungen und Begriffe“ [ebd., S. 374].

Galperin ist der Auffassung, dass die kognitive Entwicklung von Kindern von außen stimuliert und auch gesteuert werden könne und legt eine auf den eigentlichen Aneignungsvorgang gerichtete *Lerntheorie* vor. In seiner Theorie der „etappenweisen Ausbildung geistiger Operationen“ beschreibt er, wie ausgehend von konkreten Handlungen über deren sprachliche Beschreibung und Erfassung kognitive Fähigkeiten erlernt werden. Diese Theorie wurde dem deutschsprachigen Publikum im bereits genannten Aufsatz sowie in *Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen* [Galperin 1974] zugänglich gemacht. Sie postuliert fünf Etappen:[27]

1. Etappe der „materiellen Handlung“: Konkrete Handlung mit und an gegenständlichen Dingen. [Galperin 1969, S. 375; Galperin 1974, S. 36 f.]

2. Etappe der „materialisierten Handlung“: Handlung mit und an Darstellungen (Diagrammen, Skizzen, Texten und Modellen), die – im Sinne einer Isomorphie – wesentliche Eigenschaften der repräsentierten Gegenstände enthalten.[28] [Galperin 1969, S. 378 ff.; Galperin 1974, S. 37 f.]

[27] Für eine äußerst knappe Übersicht siehe [Flammer 2003, S. 193 ff.], für eine umfassende Darstellung [Rausch 1984, S. 83 ff.].

[28] Galperin unterstreicht an dieser Stelle, dass eine Etappe für Lernende einen anderen Stellenwert als für Lehrende besitzen kann: So wollen Schülerinnen und Schüler einzelne Schritte abarbeiten (zum Beispiel algebraische Umformungen aufschreiben) können, das heißt auf der materialisierten Ebene von Darstellungen handeln. Sie sind in der Regel *nicht bereit*, in diesem frühen Lernstadium begründende Erklärungen ihrer Lehrerinnen und Lehrer aufzunehmen. Erst wenn sie in diesem Handeln eine minimale Sicherheit erreicht haben, interessieren sie sich für Begründungen, warum die Handlungen so (und nicht anders) auszusehen haben. Während materialisierte Handlungen für Unterrichtende

3. Etappe der „äußeren Sprache“: Loslösen von den Gegebenheiten eines Gegenstandes oder der Darstellung durch sprachliches Beschreiben seiner Merkmale, wodurch die ganze Handlung in laut gesprochene Sprache übertragen wird. Dadurch wird das Lernen in seinem Handlungsablauf verfolg- und kontrollierbar. [Galperin 1969, S. 382 f.; Galperin 1974, S. 40]

4. Etappe der „äußeren Sprache für sich“: Gedankliche, „entlautete“ Beschreibung eines Sachverhalts in Form eines Selbstgesprächs, wodurch er gedanklich bearbeitet – und bearbeitbar – wird. [Galperin 1969, S. 384 f.; Galperin 1974, S. 40]

5. Etappe der „inneren Sprache und gedanklichen Handlung“: Kognitive Prozesse treten ohne Verbindung zu einem Sachverhalt auf, im Stil von „wenn dieses so und so gemacht würde, muss sich jenes ergeben“. Hier wird nur noch das Endergebnis sprachlich formuliert, nicht mehr der Handlungsprozess der Ergebnisgewinnung. [Galperin 1969, S. 384 f.; Galperin & Talysina 1974, S. 40]

Galperin betont immer wieder, dass vollwertige kognitive Fähigkeiten nur auf materiellen beziehungsweise – wie im Fall der Mathematik – materialisierten Handlungen aufbauen können: „Da die Kenntnisse von den Dingen durch gegenständliche Handlungen mit diesen Dingen gewonnen werden und die Handlungen, sobald sie angeeignet sind, zum Können, und soweit sie automatisiert sind, zu Fertigkeiten werden, stellen die gegenständlichen Handlungen des Schülers das dominierende und entscheidende Glied des Aneignungsprozesses dar.“ [Galperin et al. 1974, S. 81][29] Jede im Entwicklungsprozess durchlaufene Etappe diene der jeweils folgenden als ‚Sicherung‘: „Die durchlaufenen Stufen werden nicht hinfällig, sondern bilden in der verlassenen Form ein aufsteigendes System, das hinter der vorhandenen Handlung steht und den Hauptteil ihres psychologischen Inhalts ausmacht.“ [Galperin 1969, S. 399] Im Falle von Schwierigkeiten in einer Etappe sei auf die vorangegangene Etappe zurückzukehren.[30] Wie nützlich es sein kann, einen mathematischen

zur *Erklärung* einer angestrebten geistigen Handlung dienen, sind sie für Schülerinnen und Schüler „eine Abart der materiellen Handlung“ [Galperin 1969, S. 379]. – Eine komische Schilderung dieser Problematik am Beispiel des Schuhe-Bindens findet sich in [Gallin & Ruf 1998, S. 68–74].

[29] Allerdings räumt er ein, dass es „durchaus nicht einfach“ sei, die materielle bzw. materialisierte Ursprungsform einer zu erlernenden geistigen Handlung aufzufinden [Galperin 1969, S. 380].

[30] Dazu siehe [Galperin 1969, S. 383] und [Galperin & Talysina 1974, S. 113 und 120].

Sachverhalt, der sich der gedanklichen Fassung widersetzt, in materialisierter Form eines Texts, einer Skizze, eines realen oder virtuellen Modells präsentiert zu bekommen, weiß jeder Lernende aus eigener Erfahrung.

Beim Vergleich mit Piagets Entwicklungsstadien fällt bei Galperin die zentrale Funktion von *Sprache* auf: „Die Sprache bildet das Grundsystem der Hilfsmittel der psychischen Tätigkeit.“ [Galperin 1969, S. 368] Sie ist nicht einfach Illustration des Materiellen, sondern sie ermöglicht das Handeln auf einer höheren Stufe. Die dritte Etappe – die Übertragung in gesprochene Sprache – ist für Galperin in ihrer Loslösung von jeglichen materiellen bzw. materialisierten Gegebenheiten und der damit einhergehenden Abstrahierung besonders wichtig.[31]

Während Sprache in der dritten Etappe noch eine kommunikative Funktion einnimmt, wird sie in der vierten Etappe zum Mittel des Bewusstseins und gedanklichen Handelns, „zu einem Verfahren, das vorliegende Material nach und nach zu verändern“ [Galperin & Talysina 1974, S. 40]. Die (innere) Sprache ist in der letzten Etappe der Selbstbeobachtung nicht mehr zugänglich, da „sie automatisch und außerhalb der Grenzen der Selbstbeobachtung verläuft“ [Galperin 1969, S. 389]. Insgesamt lässt sich Galperins Lerntheorie durch den Dreischritt *Handeln – Sprechen – Denken* zusammenfassen.[32]

Gewiss mutet Galperins Lerntheorie aus heutiger Sicht in ihrem auf Vorhersagbarkeit und Überprüfbarkeit von Unterricht ausgerichteten Stil *mechanistisch* an – wenig erstaunlich, dass sich schon Freudenthal angesichts der Forderung sprachlichen Formulierens in der dritten Etappe an „Katechismus-Unterricht“ erinnert fühlte [Freudenthal 1991, S. 141].[33] Galperins erklärte Absicht war tatsächlich die perfekte *Kontrolle*: „Objektiv, also im Hinblick auf die Organisation des Prozesses, schaffen wir Bedingungen, unter denen sich die Handlungen des Schülers geradezu vollständig determinieren lassen.“ [Wittmann 1981 a, S. 111] Dass Galperin den Unterrichtsprozess einer klaren Kontrolle durch die Lehrenden unterstellt, heißt jedoch nicht, dass die Lernenden zur rezeptiven Passivität verurteilt sein müssen. Instruktion nach Galperin soll Lernende dazu anregen, selbst zu handeln und aktiv zu werden.

[31] Zu diesbezüglichen Schwierigkeiten siehe [Galperin 1969, S. 385].

[32] Vergleiche dazu Piagets Dreischritt, der im Sprechen gipfelt (S. 91). Für weitere Unterschiede zwischen Piagets und Galperins Theorien siehe [Gudjons 1992, S. 36–48], [Lompscher 1994, S. 2–7] oder noch ausführlicher [Rausch 1984, S. 203, S. 216 f. und S. 253 ff.].

[33] Ein entsprechendes Unterrichtsbeispiel wird im Aufsatz *Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler* beschrieben. [Galperin & Talysina 1974]

Im Kontext konstruktivistischer Unterrichtspositionen wird denn auch Galperins Betonung aktiver und konstruktiver Seiten von Lernprozessen stärker gewichtet als seine Nähe zu einem instruktionistischen Unterrichtsstil. So wird Galperins Lehrmethode in das Arsenal moderner Unterrichtsmethoden aufgenommen, wenn Galperins Unterrichtsmethode im *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* als Beispiel einer effizienten Lehrmethode angeführt wird. Unter gewissen Voraussetzungen ließen sich damit „eine hohe Intensität der aktiven Auseinandersetzung der Lernenden mit dem Lerngegenstand und entsprechend gute Lernleistungen erreichen“ [Lompscher 2001, S. 396].

Damit gehört Galperin wie schon Piaget trotz mancher Unterschiede nicht nur zu den Begründern einer denkpsychologischen Tradition, die *Denken und Lernen auf verinnerlichte Handlungen* zurückführt, sondern auch zu den Wegbereitern konstruktivistischer Theorien, die Lernen als *aktiven und konstruktiven Prozess* auffassen.

4.1.2 „Bewegliches Denken“ seit der Meraner Reform

Ein weiteres mathematikdidaktisches Prinzip, auf das sich mathematische Vorstellungsübungen beziehen, ist *bewegliches Denken*. Wittmann spricht im Zusammenhang mit dem operativen Prinzip zwar von funktionalem Denken, um sich an Dirichlets Funktionsbegriff anlehnen zu können. Wie die bereits genannten Beispiele zeigen (S. 86 f.), geht es ihm aber um mehr als um die funktionale Abhängigkeit zweier Gegebenheiten, und er erwähnt auch die Meraner Reform von 1905.[34]

Auch dort wurde von funktionalem Denken gesprochen, allerdings – obschon von der Funktionslehre ausgehend – in der erweiterten Bedeutung von *gedanklicher Variation und Kinematik* bis hin zu *Bewegungen in Gedanken*. Zu diesem mathematikdidaktischen Prinzip und seinen Auswirkungen für die moderne Mathematikdidaktik folgen nun einige Präzisierungen.[35]

[34] 1905 treffen sich die „Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte“ zu ihrer Jahrestagung in Meran. Unter dem Einfluss von Wissenschaftlern um Klein, dem „Kopf der damaligen Unterrichtsbewegung“, wird der Meraner Lehrplan beschlossen, ein Reformvorschlag bzw. „Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten“, der einen „Mathematischen Lehrplan für alle Gymnasien“ enthält. [Krüger 2000 a, S. 146 und S. 167]

[35] Damit soll nicht suggeriert werden, einzig funktional-bewegliche Denkweisen seien für die Mathematik von Bedeutung, im Gegenteil. Gerade mathematische Definitionen und Fachbegriffe sind in der Regel in einer *statischen* Sprache abgefasst, auch wenn sie *kinematische* mathematische Phänomene beschreiben (siehe die entsprechende Diskussion auf den Klagenfurter Workshops zur „Visualisierung in der Mathematik“, zum Beispiel [Kautschitsch 1984] für den Grenzwert). Aber auch über die Grenzen der Mathematik

In ihrer begriffsgeschichtlichen Dissertation *Erziehung zum funktionalen Denken* führt Katja Krüger aus, dass der Begriff „funktionales Denken“ erstmals im Meraner Lehrplan verwendet wurde. Schon in seiner Einleitung wird „die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ als wichtiges Ziel der Reform genannt.[36] Krüger fasst wie folgt zusammen:

> „Insgesamt kann der Meraner Lehrplan als Höhepunkt der seit 1890 verstärkten Bemühungen um die Modernisierung des höheren Mathematikunterrichts begriffen werden. Verschiedene frühere Reformvorhaben wurden geschickt zusammengeführt und unter dem Schlagwort ‚funktionales Denken‘ gebündelt. Es handelte sich dabei um
>
> – den Funktionsbegriff und graphische Darstellungen
> – die Einführung der Differential- und Integralrechnung
> – die stärkere Berücksichtigung von Anwendungen
> – das ‚Prinzip der Bewegung‘ aus der sogenannten ‚Neueren Geometrie‘.“ [Krüger 2000 b, S. 222]

Der Meraner Lehrplan forderte nicht nur *Fachinhaltliches* wie die Einführung der bis dahin der Hochschulmathematik vorbehaltenen Funktionslehre und Infinitesimalrechnung am Gymnasium, sondern mit dem „Prinzip der Bewegung“ auch *Methodisches*:

> „‚Funktionales Denken‘ im Sinne der Meraner Reform meinte eine gebietsübergreifende Denkgewohnheit, die den gesamten Mathematikunterricht und nicht nur einzelne Gebiete, z. B. das Thema ‚Funktionen‘ im Algebraunterricht umfasste. [...] Über die Funktionenlehre hinaus wurde versucht, das Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten einzuüben und zu flexibilisieren.“ [Krüger 2000 b, S. 224]

hinaus sind solche Fragen bedeutsam. So fragen zum Beispiel die beiden Kognitionswissenschaftler Lakoff und Núñez danach, ob und wie *kinematische* mathematische Phänomene begrifflich *statisch* gefasst und definiert werden. Gemäß ihrer Hauptthese ist Bewegung für viele mathematische Konzepte zwar genuin und konstituierend, sie wird in der begrifflich-wissenschaftlichen Fassung des Konzepts aber weder wiedergegeben noch formalisiert. Damit greifen sie Diskussionen aus dem 19. Jahrhundert auf, in denen Konzepte der Infinitesimalrechnung mit statischen Begriffen aus der Mengenlehre und der Prädikatenlogik unter *gezielter Aussparung jeglicher Bewegung* definiert wurden. Wegen der Inkompatibilitäten von ‚Geschriebenem‘ und ‚Gemeintem‘ ist es für Núñez und Lakoff auch nicht verwunderlich, dass Schülerinnen und Schüler beim Lernen entsprechender mathematischer Konzepte Mühe bekunden. [Núñez & Lakoff 1998; Lakoff & Núñez 2000; Núñez & Lakoff 2004]

[36] Die zweite Forderung der Reformer zielte auf eine „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ [Krüger 2000 a, S. 168].

Dieses didaktische Prinzip sollte nach der Absicht der Meraner Reform für alle Themen des Mathematiklehrplans umgesetzt werden, also auch für die Geometrie oder Infinitesimalrechnung. Gerade die Geometrie in den Lehrplänen des 19. Jahrhunderts folgte inhaltlich und methodisch Euklids *Elementen*, weshalb sie von den Meraner Reformern als „starr“ und „leblos“ empfunden wurde. So empfahlen sie, geometrische Figuren als ‚Stangenkonstruktionen‘, das heißt beweglich anzuschauen sowie Lehrsätze wie den Satz des Pythagoras durch „Flächenverwandlungen“ zu beweisen.[37] Auch die Entstehung von Kurven sollte beweglich gesehen werden. So sollten etwa die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel in der „Variation eines Kegelschnitts“ als spezielle Kegelschnitte und damit als zusammengehörend begriffen werden.[38] [Krüger 2000 a, S. 201–203] Kurz: „Funktionales Denken war eine *kinematische* und *Zusammenhänge stiftende* Denkweise.“ [Krüger 2000 b, S. 231, Hervorhebungen C. W.]

Damit schloss die Meraner Reform zum einen an traditionelle Bildungsziele wie die „Entfaltung der Grundkräfte“ bzw. die „Schulung logischen Denkens“ an. Durch die entschiedene Aufnahme neuer Lehrstoffe wie der Infinitesimalrechung wurde aber auch den Inhalten, die gelernt werden sollten, eine herausragende Bedeutung beigemessen.[39]

Nach dem Ersten Weltkrieg wurde – gemäß Krüger – funktionales Denken in der Mathematikdidaktik wieder als der bloße Umgang mit Funktionen interpretiert, wodurch der Aspekt der Kinematik und Beweglichkeit zunehmend in den Hintergrund trat:

> „So gewannen [...] axiomatisch-systematische Betrachtungsweisen an Bedeutung gegenüber der von den Meranern propagierten heuristisch-genetischen Methode. [...] Nicht die Zwischenlagen eines stetigen Bewegungsvorganges interessierten, sondern die Ausgangs- und Endlage

[37] Zur Visualisierung derartiger Variationen geometrischer Figuren wurden in Folge der Meraner Reform auch *Zeichentrickfilme* oder *Daumenkinos* eingesetzt. [Krüger 2000 a, S. 198 f.]

[38] Eine weitere „Metamorphose“ dieser Art liefert das Eingangsbeispiel des rollenden Bechers, das die Gerade (zylinderförmiger Becher) als speziellen Kreis (konisch zulaufender Becher) erfahrbar macht (siehe S. 1). Für zwei Beispiele aus dem Mathematikunterricht der Oberstufe, den Differentialquotienten und den Taylor'schen Lehrsatz, siehe [Krüger 2000 b, S. 205–216].

[39] Die Schulung logischen Denkens, ein neuhumanistisches Bildungsziel, sollte durch Fächer wie Latein und Mathematik erreicht werden. In Abgrenzung von solchen *formalen* Bildungszielen setzten sich gegen Ende des 19. Jahrhunderts zunehmend auch inhaltliche Bildungsziele durch. (Siehe [Krüger 2000 a, S. 75–93] und [Reusser 2001, S. 111–118].)

> bei geometrischen Abbildungen. [...] Im 20. Jahrhundert verengte funktionales Denken zunehmend und wurde als Einführung in den (Dirichletschen) Funktions- bzw. Abbildungsbegriff interpretiert. So geriet insbesondere die kinematische Komponente funktionalen Denkens in Vergessenheit.“ [Krüger 2000 b, S. 235][40]

Auch wenn funktionales Denken in der Mathematikdidaktik des zweiten Drittels des 20. Jahrhunderts in diesem engen Sinne verstanden wurde, ging es durch die Betonung des Beweglichen anstelle des Statisch-Unbeweglichen in die *Psychologie* von Piaget und Aebli ein. Indem sie verinnerlichte Handlungen „als das aktive Element des Denkens“ [Aebli 1963, S. 56] ausmachen, lassen beide Psychologen das Konzept funktionalen Denkens darin aufgehen: Auch sie gehen von *gedanklichen Bewegungen und Handlungen als zentralen Denkelementen* aus.[41] Damit unterscheiden sie sich von Traditionen, die visuellen und tendenziell eher statischen Wahrnehmungen diese zentrale Rolle zuweisen (so die Gestalt- und später auch die Kognitionspsychologie).[42]

Von der *Mathematikdidaktik* wurde funktionales Denken im beweglichen Sinne der Meraner Reformer erst mit Wittmanns operativem Prinzip in den achtziger Jahren wiederentdeckt,

> „[...] weil es zu pädagogischen Zielen von Mathematikunterricht und Schule überhaupt paßt, wie sie in den aktuellen Schlagworten von Prozeß- und Handlungsorientierung und Selbsttätigkeit ihren Ausdruck finden. Funktionales Denken bezieht sich weniger auf das Einordnen, Klassifizieren oder Systematisieren ‚fertigen‘ mathematischen Wissens, sondern auf den Prozeß der Wissensentstehung im Rahmen von Begriffsbildung, Heuristik, Problemlösen, präformalem oder anschaulichem Beweisen und Mathematisieren.“ [Krüger 2000 b, S. 239]

[40] Bemerkenswerterweise pflegen einige pädagogische Reformbewegungen abseits der Staatsschule die „Erziehung zu beweglichem Denken“ bis heute. Es sei etwa auf die *anthroposophische Pädagogik* verwiesen; für entsprechende Lehrbücher siehe *Geometrie als Sprache der Formen* mit mehreren Flächenverwandlungs-Beweisen des Satzes von Pythagoras [von Baravalle 1957, S. 153 ff.] oder den neueren Titel *Vergleichende Formenlehre* [Schuberth 1998]. In der Oberstufe steht bis heute – in Abgrenzung zur Staatsschule – die projektive Geometrie mit ihren „geometrischen Verwandtschaften“ und „Abhängigkeiten der Figuren voneinander“ auf dem Mathematiklehrplan, weil sie eine „wichtige Rolle für die Entwicklung des Denkens“ spielt. Siehe auch [Krüger 2000 a, S. 252–255, S. 58–67].

[41] Zu Piagets Rezeption von Kleins „Erlanger Programm“ siehe in [Wittmann 1981 b].

[42] Auch Texte wie *Statisches und kinematisch-funktionales Denken* [Strunz 1968, S. 211–219] sind im Kontext der pädagogisch-psychologischen Rezeption funktionalen Denkens zu sehen.

Bis heute erfreut sich das Konzept, aber auch der Begriff des funktionalen Denkens im beweglichen, Meraner Sinne bei Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern einer bedeutenden Resonanz.[43] Sie werden jedoch in unterschiedlichen Ausprägungen verwendet, wozu abschließend zwei Bemerkungen folgen.

Im Kontext von Vorstellungsübungen und mathematischem Denken interessiert zunächst Inge Schwanks Verständnis von „funktionalem" Denken und ihre Abgrenzung desselben von „prädikativem" Denken [Schwank 1996, 2003 und 2005].[44] Theoretische Überlegungen und empirische Untersuchungen zur Frage, wie Schülerinnen und Schüler von Intelligenztests her bekannte Musterergänzungsaufgaben bearbeiten, verallgemeinert Schwank zur Behauptung, dass es beim Lösen mathematischer Probleme zwei grundlegend verschiedene Präferenzen gibt. Während sich Versuchspersonen mit *funktionaler Präferenz* an Wirkungszusammenhängen orientieren – Schwank verwendet dafür die Metapher des „Zahnradgetriebes" –, orientieren sich solche mit *prädikativer Präferenz* an Eigenschaften, wofür die Metapher des „Puzzles" dient [Schwank 1998]. Dass eine Person funktionale Präferenz aufweist, heißt nicht, dass sie nicht *fähig* wäre, einen prädikativen Gedankengang nachzuvollziehen, sondern vielmehr, dass sie ohne äußere Vorgabe mathematische Probleme *bevorzugt* funktional löst.[45]

Funktionales Denken ist damit bei Schwank weniger inhalts- als vielmehr personenbezogen. Es scheint sogar *geschlechtstypisch* zu sein:

> „Die unterschiedlichen Verhaltensweisen, denen prädikative versus funktionale kognitive Strukturen zugrundegelegt werden, sind über die Geschlechter nicht gleichmäßig verteilt: Fast alle weiblichen Versuchspersonen zeigen keine funktionalen, sondern prädikative Verhaltensweisen

[43] Es soll nicht verschwiegen werden, dass es in der zeitgenössischen Mathematikdidaktik auch gegenläufige Tendenzen gibt. So lehnt Vollrath funktionales Denken dezidiert an den Funktionsbegriff an, um auch „‚statische' mengentheoretische Betrachtungen beim Umgang mit Funktionen" einzubeziehen [Vollrath 1989].

[44] Für Bezüge zwischen Schwanks funktionalem bzw. prädikativem Denken und dem operativen Prinzip siehe [Schwank 2000].

[45] In einem Interview verdeutlicht Schwank die unterschiedlichen Denkweisen am Beispiel der Zahl „Fünf": Funktional Denkende fokussieren bei natürlichen Zahlen auf den Prozessaspekt „plus eins", womit Fünf für sie diejenige Zahl ist, die auf die Vier folgt und der Sechs vorangeht. Personen mit einer prädikativen Präferenz dagegen denken eher an fünf (mehr oder weniger konkrete) Gegenstände. [Schwank 2005] Allerdings lässt sich aus beobachtbar gleichen Handlungen *nicht* immer auf gleichartiges Denken über das Handeln schließen, wie die Arbeit von [Striethorst 2004] zeigt.

> [und] es gibt mehr männliche Versuchspersonen, die funktionale Verhaltensweisen zeigen als weibliche.“ [Schwank 1994, S. 33]

Damit könnte die Erfahrung, dass die Schülerinnen Vorstellungsübungen mindestens ebenso sehr akzeptieren wie die Schüler (siehe Abschnitt 3.2), bedeuten, dass Vorstellungsübungen stärker als der traditionelle Mathematikunterricht funktionales Denken *kombiniert* mit prädikativem Denken ansprechen.[46]

Auch Verfechterinnen und Verfechter mathematischer *Filme* bzw. einer interaktiv-experimentellen *Computernutzung* berufen sich immer wieder auf funktionales Denken, allerdings in einem allgemeineren Sinne als Wittmann oder Schwank.[47] Im Unterschied zur Hintereinanderreihung von Bildern im Film ermöglicht es der Computer, mathematische Objekte – wie zum Beispiel Kegelschnitte – nicht nur zu visualisieren und kontinuierlich zu variieren, sondern zusätzlich auch Experimenten zu unterwerfen.[48] Diese neuen technischen Möglichkeiten macht sich die moderne Mathematikdidaktik zu Nutze, um „bewegliches Denken“ für das Lernen von Mathematik zu propagieren und zu fördern. So entwickelt und überprüft Jürgen Roth in seiner Dissertation *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht* [Roth 2005] ein Unterrichtskonzept zur Förderung beweglichen Denkens.

Im Zusammenhang mit Vorstellungsübungen ist die von ihm aufgearbeitete Synopse verschiedener Begriffe um das Konzept beweglichen Denkens von Bedeutung und hilft, die in diesem Abschnitt referierten Begrifflichkeiten zu ordnen: Bewegliches Denken nach Roth umfasst funktionales Denken im engen funktionsbegrifflichen Sinne, aber auch im Sinne Schwanks, da sie auf den prozessualen Charakter von Herangehensweisen fokussiert. Bewegliches Denken deckt sich weitgehend mit dem Verständnis der Meraner Reform. Roths daraus gewonnenes Begriffsverständnis betont das Hineindenken von *Bewegung* und *Bearbeitung* in geometrische Darstellungen [Roth 2005, S. 73].[49]

[46] Schwanks Ergebnisse stehen im Einklang mit Ergebnissen von entsprechenden kognitionspsychologischen Studien (dazu siehe etwa [Richardson 1999, S. 107 f.]).

[47] Siehe etwa die Workshops zur „Visualisierung in der Mathematik“, die von 1981 bis 1992 in Klagenfurt durchgeführt wurden. Viele Abbildungen in den daraus entstandenen Tagungsbänden ähneln den Abbildungen aus Lehrmitteln, die im Zuge der Meraner Reform entstanden sind. So zeigt Kautschitsch die „kontinuierlichen Veränderungen von geometrischen Figuren“ bzw. „durch bewegte Bilder dargestellte Lehrsätze“ [Kautschitsch 1987, S. 225, S. 227], und Wittmann bringt das operative Prinzip mit Nicolets Film in Zusammenhang [Wittmann 1987] (siehe auch S. 87).

[48] Ausführliches dazu in [Krüger 2000 a, S. 279–292].

[49] So lässt sich etwa durch Bewegungen wie dem *Schieben* oder *Drehen* eines allgemeinen konvexen Vierecks bzw. durch Bearbeitungen wie dem *Verändern* der Länge der Vierecksseiten die Familie der Vierecke erzeugen. [Roth 2005, S. 88–94]

Deshalb wird auch im Rahmen dieser Arbeit von *beweglichem Denken* gesprochen, wenn *funktionales Denken im kinematischen Sinne der Meraner Reformer* gemeint ist.[50]

4.1.3 Fazit

In der Mathematikdidaktik werden *kognitive Leistungen* immer wieder mit *gedanklichem Handeln* in Verbindung gebracht. So plädiert Wittmann mit seinem operativen Prinzip dafür, mathematische Sachverhalte zu erforschen, zu untersuchen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn sie Bearbeitungen und Handlungen unterworfen werden. Er stellt die Frage „Was geschieht mit ..., wenn ...?" ins Zentrum des Mathematikunterrichts und fordert, dass Unterrichtsmaterialien reales bzw. gedankliches Handeln ermöglichen. Im Hinblick auf Vorstellungsübungen sind als Ausformungen des operativen Prinzips insbesondere das bewegliche Denken, aber auch die operativ-konstruktive Begriffsbildung und das operative Beweisen von Bedeutung.

Für seine Forderung nach Handlungsanlässen im Mathematikunterricht beruft sich Wittmann auf Piaget, Aebli und Galperin. Wie diese begreift auch er Lernen als den *aktiven Aufbau kognitiver Strukturen* des Individuums und damit nicht als einen passiv-rezeptiven Prozess.

Damit lassen sich folgende *Bezüge* des hier behandelten Unterrichtsinstruments zu mathematikdidaktischen Prinzipien – und damit erste Begründungen – nennen (siehe Forschungsfrage *(F2b)*, S. 83):[51]

1. Kognitive Strukturen werden nach Piaget und Galperin durch konkretes Handeln an Objekten aufgebaut. Im Zuge des Aufbaus kognitiver Strukturen werden konkrete Handlungen schrittweise verinnerlicht, weshalb Lernen schrittweise vom konkreten Handeln weg hin zum gedanklichen Handeln führt.

   Für Kinder der Primarschule mögen Handlungen an realen Objekten adäquat sein, um Denkvorgänge anzuregen und Denkstrukturen aufzubauen. Wenn die Entwicklung kognitiver Strukturen im gedanklichen Handeln ohne konkret vorhandene Materialien gipfelt, muss der reale

[50] Im *Gegensatz* zu funktionalem Denken wird nicht nur wie bereits erwähnt von *statischem* oder *prädikativem* Denken gesprochen, sondern auch von *begrifflichem* (für die Algebra siehe [Vollrath 1994]) oder von *diagrammatischem* Denken (für die Zahlentheorie oder lineare Algebra siehe [Dörfler 2003]).

[51] Für eine weitere, stärker pädagogische Begründung siehe S. 126.

Handlungsbereich besonders für Lernende der Sekundarstufe II, die 16 Jahre und älter sind, verlassen und *gedankliches Handeln an gedanklichen Materialien* angeregt werden. Dazu eignet sich die Grundfrage des operativen Prinzips „Was geschieht mit ..., wenn ...?“ ganz besonders.

2. In mathematischen Vorstellungsübungen werden gedankliche mathematische Objekte nicht nur beschrieben, sondern sie leiten dazu an, *an diesen Objekten zu handeln und sie Fragen zu unterwerfen.*

   Damit liegt der Schwerpunkt von Vorstellungsübungen – im Unterschied zur ursprünglichen Fassung des operativen Prinzips von Wittmann – nicht in der nachfolgenden Untersuchung und Systematisierung der Handlungen, weshalb Vorstellungsübungen der *erweiterten Fassung des operativen Prinzips* nachkommen.

3. Während Wittmann in seinem operativen Prinzip von funktionalem Denken im engen Sinne spricht, setzen Vorstellungsübungen bewegliches Denken im kinematischen Sinne der Meraner Reform ein. Vorstellungsübungen setzen funktionales Denken wie schon Wittmann unter anderem zur Konstruktion mathematischer Objekte und zur Begründung mathematischer Sachverhalte ein. *Bewegliches Denken ist besonders dazu geeignet, gedankliches Handeln an gedanklichen Objekten anzuregen.*

4.2 Vorstellungen und das Lernen von Mathematik

Im Gegensatz zum vorangehenden Abschnitt geht es in diesem Abschnitt weniger um den Vorgang des Denkens als vielmehr um den damit in Zusammenhang gebrachten Inhalt, die *Vorstellungen.* Die Annahme, kognitive Denkleistungen wie logisches Denken, Problemlösen oder Begriffsbildung stünden vorab mit Vorstellungen in Zusammenhang, ist in der modernen Denkpsychologie weit verbreitet – denn „ohne Wolle kann man nicht stricken!“ [Friedrich & Mandl 1992, S. 18 ff.][52] Auch in der Mathematikdidaktik

[52] Mit dieser Metapher drücken Friedrich und Mandl aus, dass zum erfolgreichen Problemlösen nicht nur *effektive Strategien*, sondern genau so sehr *inhaltsspezifisches Wissen* gehört. Dies gilt besonders, wenn es sich um komplexe Probleme aus realen Wissensgebieten handelt und nicht – wie bei Piaget und auch über ihn hinaus – um formal klar strukturierte, aber wissensarme Probleme wie zum Beispiel das Umgießexperiment.

sind Vorstellungen – in unterschiedlichster Begriffsauslegung – ein bedeutendes Forschungsgebiet geworden. In dieses riesige Gebiet wird hier ein Einblick gegeben, um schließlich zu einem für die folgende Analyse tragfähigen Vorstellungsverständnis zu gelangen.[53]

Verbindungspunkt ist hier vom Hofes mathematikdidaktisches Konzept der „Grundvorstellungen“, welches im nächsten Abschnitt zu einer vorläufigen Bestimmung des Vorstellungsbegriffs führen wird. Es macht den Aufbau von Vorstellungen zum Ziel des Mathematikunterrichts, da sich in Vorstellungen Sinn und Bedeutung mathematischer Inhalte konstituiert. Zwei weitere Unterrichtskonzepte – das eine von Gallin und Ruf, das andere von Lengnink – werden im Hinblick auf die Begriffsbestimmung, aber auch auf die Weiterentwicklung mathematischer Vorstellungsübungen herangezogen, da hier ebenfalls Vorstellungen thematisiert werden.

[53] In der aktuellen deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden Vorstellungen unterschiedlich verstanden und auf unterschiedliche Weise erforscht (die Literaturangaben stammen aus den Tagungsbänden 2002 bis 2006 der deutschen *Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* und erheben keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit):
· *die Fähigkeit, räumlich-geometrische Vorstellungen aufzubauen*: die computergestützte Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens von Schülerinnen und Schülern [Hartmann & Hellmich 2002] oder der Einfluss des räumlich-geometrischen Vorstellungsvermögens auf die Mathematikleistung von Schülerinnen und Schülern [Grüßing 2003]
· *die Präferenz, Vorstellungen einzusetzen*: der Einsatz visueller bzw. symbolisch-verbaler Vorstellungen von Jugendlichen beim Bearbeiten mathematischer Probleme [Borromeo-Ferri 2002; Borromeo-Ferri 2003]
· *die individuellen Vorstellungen von spezifischen, mathematischen Inhalten*: Schülervorstellungen zum Funktionsbegriff [Biermann 2003], Vorstellungen von Lehramtskandidatinnen und -kandidaten zur Exponentialfunktion [Törner 2001], Schülervorstellungen zu Irrationalzahlen [Törner 2003], Schülervorstellungen zum Mächtigkeitsbegriff [Scholz & Törner 2003], Studentenvorstellungen zum Vektorraum [Fischer 2004] oder Schülervorstellungen zum Zufall [Döhrmann 2005] (in diesen Bereich fallen auch alle Arbeiten zu Grundvorstellungen)
· *die Überzeugungen und Einstellungen* (sog. „beliefs“) *im Zusammenhang mit Mathematik*: Lehrervorstellungen zum Unterrichten des Problemlösens [Möller 2002], Lehrervorstellungen zu Aufgaben [Komorek et al. 2003], Lehrervorstellungen zur Unterrichtsqualität [Kuntze 2004], Lehrervorstellungen zum Unterrichten von Mathematik [Heinze & Wiedenhofer 2005], Vorstellungen koreanischer und deutscher Klassen zur Mathematik [Kwak 2005] oder Vorstellungen australischer Studentinnen und Studenten zur Statistik [Rolka 2005]

Inwiefern Vorstellungsbilder und Vorstellungsstrategien zum *Lösen mathematischer Probleme* herangezogen werden, wird sehr selten untersucht. Neben den Arbeiten von Borromeo-Ferri sind Forschungsarbeiten von Presmeg (mehr dazu in Fußnoten auf S. 117, S. 129 und S. 247), aber auch solche wie [Douville & Pugalee 2003] zu nennen. Weniger Berührungsängste mit Vorstellungsbildern und Vorstellungsstrategien hat die Forschung zum *Lesen und Textverstehen*, die sogar unterschiedliche Förderansätze zur Bildung von Vorstellungen kennt, siehe etwa [Bannert & Schnotz 2006, S. 77–83].

4.2.1 „Grundvorstellungen“ nach vom Hofe

In seiner Dissertation *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* zeichnet Rudolf vom Hofe den ideengeschichtlichen Werdegang des Grundvorstellungskonzepts in der Pädagogik, der Psychologie und der deutschsprachigen Mathematikdidaktik nach und entwickelt darauf aufbauend ein Unterrichtskonzept. Dabei bezieht er sich unter anderem auf Piaget und Aebli. Am Ende seiner Ideengeschichte kommt vom Hofe zu folgendem Schluss:

> „*Auf psychologischer Ebene gibt es viele unterschiedliche und z. T. konträre Vorstellungskonzepte – auf [der] didaktischen Ebene hingegen schält sich ein von Elementen deutlicher Kontinuität geprägtes Grundvorstellungskonzept heraus, das sich als weitgehend unabhängig von psychologischen Beschreibungsmodellen erweist.*“ [vom Hofe 1995, S. 95, Hervorhebung im Original]

Vom Hofe geht es weniger darum zu bestimmen, was (Grund-)Vorstellungen sind, als vielmehr um ihre Funktion für das Lernen. So hält er resümierend fest, dass die Aufgabe von Grundvorstellungen darin besteht, Lernende in ihrem Lernprozess in ein mathematisches Gebiet hineinzutragen, das heißt:

> „*Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:*
>
> – *Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,*
> – *Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,*
> – *Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.*“ [vom Hofe 1995, S. 97 f., Hervorhebung im Original]

Damit sind Grundvorstellungen tragfähige inhaltliche Vorstellungen, die im Zusammenhang mit *mathematischer Modellbildung* eine Rolle spielen. Sie stehen nicht nur an der Schwelle zwischen der Mathematik und der Welt, sondern erfassen „Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz: *Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität.*" [vom Hofe 1995, S. 98, Hervorhebung im Original]

An dieser Stelle wird klar, weshalb sich vom Hofe nicht einseitig auf die *Kognitionspsychologie* bezieht oder gar stützt, obwohl gerade sie sich für Vorstellungen interessiert. Zum einen ist es nicht ihr Ziel, Lernvorgänge wie die Entwicklung und den Aufbau kognitiver Strukturen oder die Konstruktion von Bedeutung zu verstehen.[54] Zum anderen sind die kognitionspsychologischen Annahmen und Ergebnisse bisher nicht in mathematikdidaktische Prinzipien umgesetzt worden.[55]

Vom Hofe verwendet in seinem didaktischen Vorstellungsverständnis zwar den kognitionspsychologischen Begriff der „visuellen Repräsentationen" und folgt damit der üblichen Bild-Metaphorik des Vorstellungsbegriffs.[56] Er verknüpft Vorstellungen jedoch auch mit „Verinnerlichungen" und den „Handlungsvorstellungen" Piagets, die es im Unterricht aufzubauen gelte, eben um „operatives Handeln auf der Vorstellungsebene [zu] ermöglichen". Damit

[54] Die Kognitionspsychologie basiert auf psychologischen Theorien in der Tradition Piagets und auf theoretischen Ansätzen der Informatik. Ihr Ziel ist es, Gedächtnisleistungen und Problemlösungsprozesse eingeschränkt im Sinne der Informationsaufnahme und -verarbeitung zu modellieren. Mit ihrem auf *Vorstellungen* und *gedanklichen Konzepten* von Individuen gerichteten Interesse vollzog sich die „kognitive Wende". Häufiger als von Vorstellungen wird in der Kognitionspsychologie von „mentalen" bzw. „internen Repräsentationen" gesprochen, die von „externen" Repräsentationsformen in Form von Darstellungen unterschieden werden. Indem sie neben verbalen („propositionalen") mentalen Repräsentationen auch visuelle („analoge") mentale Repräsentationen kennt, spielen neben sprachlich-begrifflichen Konzepten solche der *Wahrnehmung* eine konstituierende Rolle. Einige Kognitionspsychologen vertreten jedoch den Standpunkt, dass auch analoge Repräsentationen auf propositionalen Repräsentationen basieren („imagery debate"). Vorgestellte Handlungen spielen in der kognitionspsychologischen Konzeptualisierung zwar keine Rolle, werden aber – wie das Beispiel der „mental rotations" zeigt – durchaus untersucht. (Für einen kurzen lexikalischen Überblick über die Kognitionspsychologie siehe [Schiefele & Heinen 2001], für eine gründliche Einführung siehe [Eysenck & Keane 2000, Kap. 9], für die philosophischen Grundlagen der Kognitionspsychologie und eine moderne Kritik an ihrem Reduktionismus siehe [Zielke 2004, S. 69–144]. Für einen Überblick über die „imagery"-Forschung aus kognitionspsychologischer Sicht unter spezieller Berücksichtigung hirnphysiologischer Befunde siehe [Richardson 1999].)

[55] Wenigstens verwenden die mir bekannten entsprechenden Versuche kognitionspsychologische Annahmen und Ergebnisse nur für eine *Differenzierung* der Sicht auf traditionelle didaktische Prinzipien und nicht für eine Entwicklung neuer didaktischer Prinzipien (siehe etwa [Klieme 1987] oder [Einsiedler 1996]).

[56] An anderer Stelle spricht vom Hofe statt von „visuellen Repräsentationen" gleichbedeutend von „Vorstellungsbildern" oder nur von „Bildern" [vom Hofe 1995, S. 63 bzw. 81].

nimmt er in der Streitfrage, ob es im Unterricht um das Lehren des Denkens oder um die Vermittlung von Wissen gehe, eine *pragmatische Position* ein. Für ihn kann der an und für sich doppeldeutige Begriff der Vorstellung sowohl die Fähigkeit des *Vorstellens* – einen Denkakt – als auch das Objekt einer *Vorstellung* – einen Denkgegenstand – bezeichnen.[57] Mit seiner Position steht vom Hofe nicht nur in der Tradition Piagets, Aeblis und Wittmanns,[58] er entspricht auch aktuellen Forderungen der Pädagogischen Psychologie.[59]

In der Folge der theoretischen Aufarbeitung und der begrifflichen Fassung des Grundvorstellungskonzepts durch vom Hofe wurden der Begriff, aber auch das Konzept der Grundvorstellung in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik stark rezipiert. Auch das in dieser Studie verwendete Verständnis von Vorstellung wird darauf aufbauen (siehe Abschnitt 4.3, S. 127 ff.).

Im zweiten, aus Sicht der Unterrichtspraxis zu kurz geratenen Teil seiner Dissertation schlägt vom Hofe vor, „Grundvorstellungen als didaktisches Modell" für den Unterricht zu verwenden. Unter Bezugnahme auf Heinrich Bauersfelds „subjektive Erfahrungsbereiche" skizziert er ein pädagogisches Verständnis von Grundvorstellungen, das auch die Schülervorstellungen – das heißt die Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler beim Lernen tatsächlich aufbauen – berücksichtigt.[60] Damit wird die normative Auffassung von Grundvorstellungen um einen *deskriptiven* Aspekt erweitert:

[57] Während vom Hofe in seinem Verständnis von Grundvorstellungen eher deren Handlungs- als deren Objektcharakter betont, finden sich unter seinen Beispielen von Grundvorstellungen nicht nur solche, die Denkakten (etwa der „Änderungs-Vorstellung" bei Funktionen), sondern auch solche, die Denkgegenständen („Objekt-Vorstellung") entsprechen.

[58] Nach Piaget und Aebli werden – von realen Gegenständen und konkreten Handlungen ausgehend – nicht nur verinnerlichte Handlungen und Handlungsschemata, sondern auch Vorstellungsbilder aufgebaut. So vergleicht Piaget Vorstellungsbilder mit „Zeichnungen", die durch „Nachahmen" hergestellt werden. [Aebli 1963, S. 59] Nach Aebli werden Handlungen und Wahrnehmungen zu „Handlungs- und Wahrnehmungsvorstellungen verinnerlicht". [Aebli 1985, S. 5] Allerdings weisen beide Autoren solchen Vorstellungsbildern nicht die gleiche aktive Rolle in Denkprozessen zu wie den verinnerlichten Handlungen.

Wittmann erläutert, wie sich die Bindung von Handlungen an reale Objekte immer mehr löst und die Objekte „immer mehr durch ihre Vorstellung ersetzt werden (Verinnerlichung, Symbolisierung, sprachliche Darstellung)." Schließlich lässt er den Begriff der Vorstellung im präziseren Begriff des „Schemas" aufgehen. [Wittmann 1981 a, S. 63–65]

[59] Reusser setzt sich dafür ein, die Frage „Denken oder Wissen?" für die Pädagogik nicht mehr zu stellen, da sie in eine Sackgasse führe. Vielmehr plädiert er dafür, die beiden Auffassungen von Unterricht „zugunsten eines dialektischen Denkens in Synthesen, Wechselwirkungen und Balancen" [Reusser 2001, S. 128] miteinander zu verklammern.

[60] Nach Bauersfeld sind kognitive Strukturen grundsätzlich bereichsspezifisch. Mit dem Terminus „subjektiver Erfahrungsbereich" bezeichnet er den Alltagskontext, in dem eine Schülerin oder ein Schüler eine mathematische Aufgabe lösen kann. [Bauersfeld 1983]

> „– Die *Schülervorstellungen* geben dabei Aufschluß über die *individuellen Erklärungsmodelle des Schülers*, die in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind.
>
> – Bei der normativ geprägten *Grundvorstellung* handelt es sich hingegen um eine *didaktische Kategorie des Lehrers*, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt.“ [vom Hofe 1995, S. 123, Hervorhebungen im Original]

Wegen dieser den normativen Aspekt ergänzenden Sicht spricht vom Hofe im zweiten Teil seiner Dissertation denn auch von einem *erweiterten Grundvorstellungskonzept*. Für einen schematischen Überblick über dieses Erweiterung mit ihren Bezügen siehe Abbildung 4.2 (Linien zwischen den Kästen stehen für inhaltliche Bezüge zwischen den entsprechenden Ansätzen).[61]

So kann vom Hofe sein Unterrichtskonzept zur „Ausbildung von Grundvorstellungen“ formulieren, in dem er normative und deskriptiv feststellbare Aspekte von Grundvorstellungen zu integrieren versucht: In diesem – in zwei kleinen Fallstudien erprobten – Unterrichtskonzept nimmt der Lehrprozess in der inhaltlichen Bestimmung von normativen Grundvorstellungen durch die Lehrperson seinen Anfang. Die Lehrperson setzt diese Grundvorstellungen in einen Sachzusammenhang um. Als Zielvorstellung endet der Lernprozess damit, dass die Schülerinnen und Schüler entsprechende individuelle Erklärungsmodelle ausbilden, die – trotz subjektiv unterschiedlichen Erfahrungen, die sie damit verbinden – einen intersubjektiven Kern aufweisen (sollten), der ein Verständnis mathematischer Begriffe und Verfahren ermöglicht. Damit hebt vom Hofe *die doppelte Bedeutung von Vorstellungen beim Lehren und Lernen mathematischer Inhalte hervor* und lässt sie in einem neuen Licht erscheinen. Das Unterrichtskonzept ist in Abbildung 4.3 schematisch dargestellt (nach [vom Hofe 1995, S. 124], Ergänzungen C. W.).

In den erwähnten Fallstudien finden sich auch erste Vorschläge von Grundvorstellungen, so für die Addition natürlicher Zahlen. Im Themenheft *Grundvorstellungen entwickeln* von 2003 listet vom Hofe nicht nur weitere Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen der Grundschule auf, sondern auch

[61] Im englischen Sprachraum haben Tall und Vinner mit dem Begriffspaar „concept image“ und „concept definition“ die Spannweite zwischen Schülervorstellungen und zu vermittelnden Inhalten einzufangen versucht. [Tall & Vinner 1981; Tall 1988]

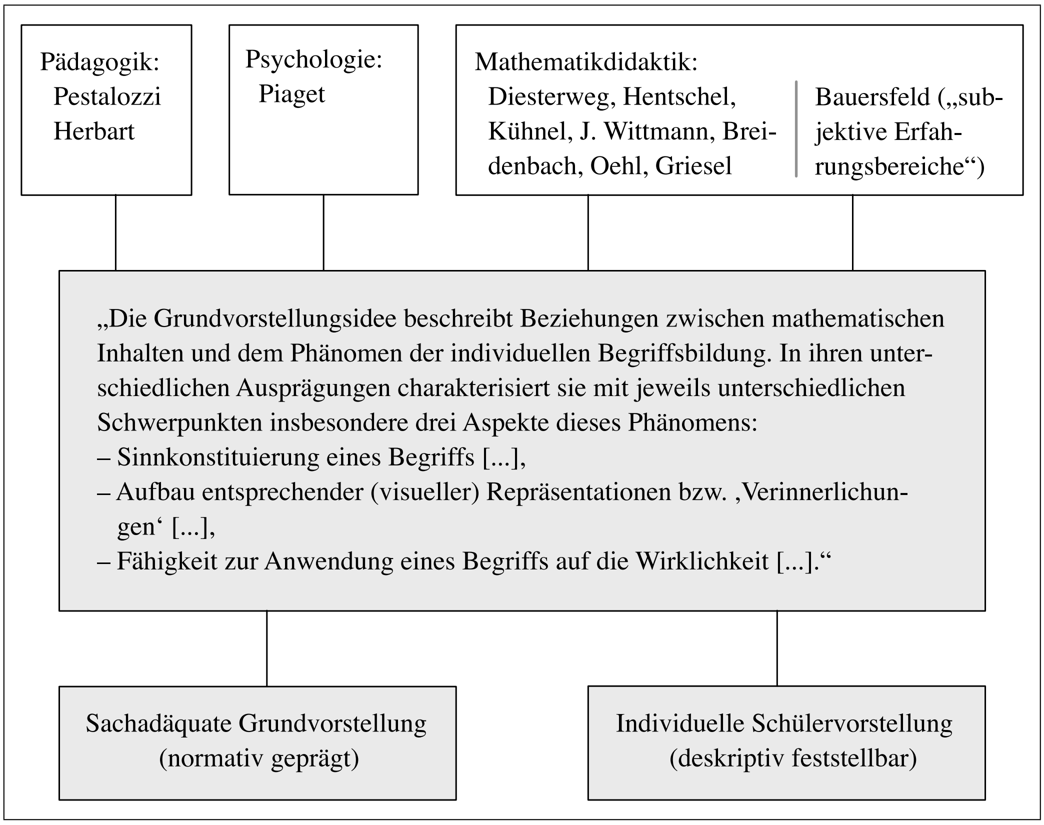

Abb. 4.2: Bezugsschema des erweiterten Grundvorstellungskonzepts bei vom Hofe

Grundvorstellungen zu Inhalten der Sekundarschule. So nennt er im Zusammenhang mit dem Variablenbegriff „Gegenstand-Vorstellung“, „Einsetzungs-Vorstellung“ und „Kalkül-Vorstellung“, und im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff nennt er „Zuordnungs-Vorstellung“, „Kovariations- oder Änderungs-Vorstellung“ und „Objekt-Vorstellung“ [vom Hofe 2003, S. 6].

Wie die Beispiele bereits zeigen, können zu einem mathematischen Inhalt oder Begriff also mehrere Grundvorstellungen gehören. Dabei handelt es sich allesamt um Grundvorstellungen im *normativen* Sinne. Sie erfassen, was mathematische Inhalte und Begriffe aus fachlicher Sicht bedeuten. Wenn vom Hofe also analysiert, welche Grundvorstellungen Schülerinnen und Schüler im Unterricht aufbauen *sollen*, dann steht er in der Tradition einer normativen Stoffdidaktik, die aufgrund ihrer Analysen mathematische Inhalte und Begriffsverständnisse vorgibt.[62]

[62] Damit stehen normative Grundvorstellungen in der Tradition *fundamentaler Ideen* (siehe [vom Hofe 1995, S. 128 f.], für eine Einführung in dieses Konzept siehe [Fischer 1976]). Entsprechend wird versucht, die beiden Konzepte zusammenzuführen, siehe [Vohns 2005].

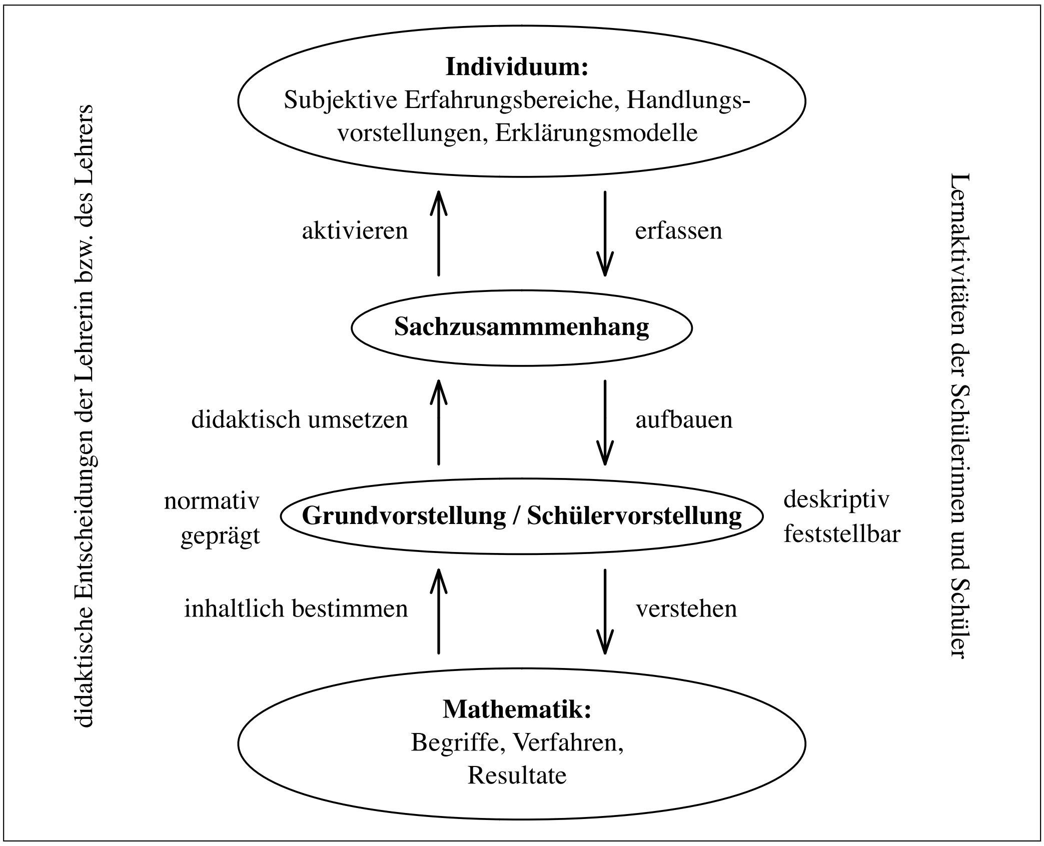

Abb. 4.3: Unterrichtskonzept zur Ausbildung von Grundvorstellungen nach vom Hofe

Obwohl vom Hofe mit der Erweiterung des Grundvorstellungskonzepts in eine pädagogische Dimension vorstößt, interpretiert er *Schülervorstellungen* vor allem defizitorientiert im Sinne von Fehlvorstellungen und macht sie nicht fruchtbar.[63] Diese Einschränkung ist aus zweierlei Gründen bedauerlich. Erstens brauchen Schülervorstellungen nach der Phase des „Erfassens von Zusammenhängen“ und „Aufbauens von Grundvorstellungen“ nicht mit einer normativen Grundvorstellung übereinzustimmen und können trotzdem richtig sein. Zweitens hat die starke Orientierung an der – in der Lehrkraft personifizierten – Norm damit zu tun, dass auf die Schülervorstellungen erst kurz

[63] Dazu siehe etwa [vom Hofe 1995, S. 10–14] oder [Wartha & vom Hofe 2005]. Darüber hinaus spielt die Erweiterung des Grundvorstellungskonzepts um den Aspekt der Schülervorstellungen in vom Hofes neueren Arbeiten keine Rolle mehr. Vielmehr geht es – im Kontext von PISA – darum, ein Kriterium der „Grundvorstellungsintensität“ zur Kategorisierung von Aufgaben zu entwickeln und einen „Atlas“ normativer Grundvorstellungen zu verfassen [Blum et al. 2004, S. 156].

vor Ende des Unterrichtsprozesses (an der Stelle „deskriptiv feststellbar“ in Abb. 4.3) geschaut wird, und zwar mit einer überprüfend-kontrollierenden Haltung. Dass das nicht zwangsläufig so sein muss, zeigen Unterrichtskonzepte, die Schülervorstellungen viel früher mit einbeziehen. Um sie wird es in den beiden nächsten Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 gehen.

Wie setzt die Lehrperson die Grundvorstellung eines Themas, nachdem sie sie inhaltlich bestimmt hat, didaktisch um? Wie müssen Aufgaben konstruiert sein, um die Ausbildung von Grundvorstellungen zu fördern? Weil vom Hofe davon ausgeht, dass Grundvorstellungen eng mit mathematischer Modellierung verbunden sind, schlägt er zwei mögliche Aufgabentypen vor:

- „Gegeben ist eine Sach- bzw. Anwendersituation (und meist auch eine damit zusammenhängende Fragestellung). Gesucht sind dazu passende mathematische Inhalte bzw. Verfahren.“
- „Gegeben sind mathematische Inhalte bzw. Verfahren (Zahlen, Terme, Operationen, Gleichungen, Funktionen usw.). Gesucht sind dazu passende Sach- bzw. Anwendungssituationen.“ [Blum & vom Hofe 2003, S. 16]

Zum ersten Aufgabentyp gehören die üblichen geschlossenen Textaufgaben sowie Problemsituationen aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht. Zur Verdeutlichung des zweiten, offeneren Aufgabentyps führen sie Rechengeschichten („Erfinde eine Geschichte zu 150 g : 7,5 g“) an, zu deren Bearbeitung etwa Größenvorstellungen („was könnte etwa 150 g bzw. 7,5 g wiegen“) und Operationsvorstellungen („Aufteilen als Grundvorstellung der Division“) eingesetzt werden müssen. [Blum & vom Hofe 2003, S. 17]

Es wird nicht grundsätzlich angezweifelt, dass aus den Bearbeitungen derart offener Aufgaben Schülervorstellungen herausgelesen werden können. Jedoch ist das interpretative Vorgehen, das vom Hofe zur „deskriptiven Feststellung“ einsetzt (Herstellung, Interpretation und Analyse eines Transkripts mit Aussagen einzelner Schülerinnen und Schüler) wegen des enormen Zeitaufwandes bestenfalls von Forschenden *außerhalb* der Schule leistbar. Einzelne Schülervorstellungen können weder im laufenden Unterricht noch in der Unterrichtsnachbereitung herausgearbeitet und damit weder den Unterrichtenden noch den Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht werden – etwaige Ergebnisse lägen lange nach dem eigentlichen Lernprozess vor.[64]

[64] Zudem gibt es nach Büchters und Leuders’ Klassifikationsschema außer der Problemumkehrung, die hier vorliegt, noch einige Möglichkeiten mehr zur Öffnung geschlossener Aufgaben. [Büchter & Leuders 2005, S. 93]

Demnach gelingt es vom Hofe nicht, den erweiterten Aspekt von Grundvorstellungen für Lehrkräfte und damit für den Unterricht nutzbar zu machen.

Insgesamt gesehen liegt die Stärke des Grundvorstellungskonzepts im theoretischen Bereich der Unterrichtsforschung. Zum einen ist die ideengeschichtliche Aufarbeitung des Konzepts und mit ihr die Heraushebung einer normativen Funktion von Vorstellungen zu nennen, zum anderen die (begonnene) Sammlung von Grundvorstellungen zu Lehrplanthemen, die unterschiedliche Sichtweisen auf Fachinhalte dokumentiert. Die Unterrichtsforschung hat damit ein begriffliches und konzeptuelles Instrument zur Überprüfung von Schülerkenntnissen an die Hand bekommen, das einen etwas weiteren Blick als den rein fachlichen ermöglicht. Unterrichtende können bei der Vorbereitung ihres Unterrichts und der Frage, was aus Sicht der Fachdidaktik an einem schulmathematischen Thema wesentlich sein könnte, Unterstützung erhalten.

Mit der Erweiterung seines Grundvorstellungskonzepts auf individuelle Schülervorstellungen deutet vom Hofe an, dass die Beschränkung auf normativ orientierte Grundvorstellungen im didaktischen Kontext zu kurz greift. Sein begleitend entwickeltes Unterrichtskonzept ist jedoch von untergeordneter Bedeutung. So macht er keine wirklichen unterrichtstauglichen Vorschläge, wie Grundvorstellungen gezielt aufgebaut und wie mit Schülervorstellungen nicht defizitorientiert umgegangen werden könnte. [vom Hofe 1995, S. 103 ff.]

Schülervorstellungen mit ihren individuellen bzw. lebensweltlichen Seiten lassen sich jedoch in den Mathematikunterricht einbeziehen und im unmittelbaren Unterricht nutzen, ohne dass deshalb auf fachlich-inhaltliche Aufgabenstellungen verzichtet werden müsste. Entsprechende pädagogische Ansätze liegen der Dialogischen Didaktik von Gallin und Ruf sowie dem Unterrichtskonzept von Lengnink zugrunde. Sie werden in den beiden nächsten Abschnitten vorgestellt.[65]

4.2.2 „Singulär“ und „regulär“ nach Gallin und Ruf

Wenn Schülervorstellungen für den Unterricht produktiv gemacht werden sollen, müssen diese zuerst einmal stimuliert und explizit gemacht werden. Wie sehen entsprechende Unterrichtsarrangements aus? Und wie können Schülervorstellungen für den Unterrichtsfortgang genutzt werden?

[65] Von der aktuellen deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden auch unmittelbar auf vom Hofes Forderung, im Unterricht seien Grundvorstellungen aufzubauen und zu erfassen, bezogene Unterrichtsvorschläge entwickelt, siehe etwa [Prediger 2006].

Die *Dialogische Didaktik* von Peter Gallin und Urs Ruf gibt auf diese beiden Fragen mögliche Antworten. Dieses ausgereifte didaktische Arrangement ermöglicht Lehrenden nicht nur, die Schülervorstellungen im Unterricht zu erheben, sondern sie führt vor, wie Lehrende und Lernende mit ihren Vorstellungen im Rahmen des Unterrichts produktiv umgehen können. Da diese Didaktik in ausführlicher Form greifbar ist, wird sie hier nur mit Blick auf normativ orientierte und deskriptiv feststellbare Vorstellungen erläutert.[66]

Während in vom Hofes Vorschlag der Unterricht mit Hilfe von Grundvorstellungen gestaltet wird, um die Schülerinnen und Schüler anzuleiten, ihre Vorstellungen zu Grundvorstellungen auszubilden, erlaubt die Dialogische Didaktik eine komplexere Unterrichtsmodellierung. „Dialogisch“ nennt sich diese Didaktik, weil die Rollen des Erklärens und Zuhörens im Verlauf eines solchen Unterrichts wechseln. Das Erklären ist nicht einseitig Sache der Lehrperson, das Zuhören und Verstehen ist nicht einseitig Sache der Schülerinnen und Schüler. Jede Person, die sich ausdrückt, ist – ob Lehrperson oder Schülerin bzw. Schüler – *Expertin* für das, was sie ausdrückt. Nur sie weiß darüber Bescheid. Die Person, die zuhört oder liest, ist immer *Novizin* in Bezug auf das, was sie erfährt. Insbesondere misst die dialogisch unterrichtende Lehrperson den Herangehens- und Verstehensweisen ihrer Schülerinnen und Schüler ein solch großes Potenzial zu, dass der Unterricht weniger darin besteht, die Schülerinnen und Schüler von ihrer eigenen, je subjektiven Sichtweise weg hin auf die ‚richtige Fährte‘ zu lenken, sondern vielmehr maßgeblich auf ihrer subjektiven Sichtweise *aufbaut*. Dazu weiter unten mehr (S. 120 ff.).

Um den *wissenssoziologischen* Charakter solcher Herangehens- und Verstehensweisen zu kennzeichnen, verwenden Ruf und Gallin die Begriffe der „Regularität“ und „Singularität“. Diese beiden auch für die vorliegende Arbeit zentralen Begriffe lassen sich wie folgt beschreiben (siehe Tab. 4.2):

- *Regulär* ist eine Herangehens- und Verstehensweise, wenn sie auf ausgehandelter Übereinkunft innerhalb einer sozialen Gruppe (Familie, Gesellschaft, Schule, Mathematik) beruht. Sie beinhaltet das, was von dieser Gruppe als zentral angesehen wird und spielt damit bei der Genese von ‚Fachsprache‘ bzw. ‚Fachwissen‘ (Begriffen, Verfahren und Algorithmen) eine konstituierende Rolle. Damit kommt in Regulärem nicht nur zum Ausdruck, was als ‚richtig‘ (beziehungsweise ‚falsch‘) erachtetet

[66] Die beiden Bände *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik* [Ruf & Gallin 1998 a; Ruf & Gallin 1998 b] enthalten theoretische Grundlagen, Ausführungen zu den Prinzipien und unterrichtspraktische Beispiele zur Dialogischen Didaktik.

	Geometrie	**Arithmetik**	**Arithmetik**	**Arithmetik**	**Algebra**	**Analysis**
regulär	Kreis als Menge aller Punkte, die von festem Punkt dieselbe Entfernung aufweisen	natürliche Zahl als Anzahl	natürliche Zahlen als Nachfolger auf dem Zahlenstrahl	Multiplikation als Fläche eines Rechtecks	Funktion als Zuordnung, Kovariation oder als Objekt	unendliche Reihe als Grenzwert (etwa $0{,}\overline{9} = 1$)
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
singulär	Kreis als rotierende Strecke	Zahl als Punktwolke	natürliche Zahlen als Zahlenraumbilder	Multiplikation in additiver Lesart	Funktion als Verkleidungsspiel	unendliche Reihe als Grenzprozess (etwa „$0{,}\overline{9} < 1$“)

Tab. 4.2: Reguläre vs. singuläre Sichtweisen mathematischer Inhalte

wird, sondern es dient seinerseits zur Normierung neuer Theorien. Es beinhaltet das tradierte Fachverständnis, welches – mit Martin Wagenschein – in der „Sprache des Verstandenen“ formuliert ist [Wagenschein 1965, S. 162]. Damit sind vom Hofes *Grundvorstellungen im normativen Sinne* nach Ruf und Gallin *regulär*.[67]

So handelt es sich beim Zahlenstrahl um eine reguläre Sichtweise für die Menge der reellen Zahlen, wodurch Zahlen als Elemente einer abstrakten Menge in Form von Punkten in einen geometrischen Kontext gestellt werden.[68] Die Eigenschaft von Punkten, dieselbe Entfernung

[67] Ob die Sichtweise eines mathematischen Inhalts regulär oder singulär ist, ist nicht nur eine Frage ihrer ‚Wahrheit‘ oder ‚Beweisbarkeit‘, sondern auch eine Frage ihrer Akzeptanz innerhalb der Fachgemeinschaft. Zum Prozess mathematischer Wissensbildung siehe Hefendehl-Hebekers Perspektivenpapier [Hefendehl-Hebeker 2004 b, S. 3 ff.], zur Rolle der mathematischen Gemeinschaft bei der Konsolidierung mathematischen Wissens siehe Heintz’ wissenschaftssoziologische Habilitationsschrift [Heintz 2000, Kap. 5].

[68] Zu den weitreichenden Konsequenzen dieser Sichtweise siehe Arbeiten von Lakoff und Núñez (etwa [Lakoff & Núñez 2000, S. 15–103]).

zu einem festen anderen Punkt aufzuweisen, wird zur Definition eines Kreises herangezogen und ist damit ebenfalls regulär. Auch die Darstellung der Multiplikation als Fläche eines Rechtecks ist regulär, dasselbe gilt für alle Grundvorstellungen.[69] Beispiele von regulären Sichtweisen aus der Analysis sind die Ableitung als lokale Änderungsrate bzw. als Steigung oder die Auffassung konvergenter unendlicher Reihen (etwa 0,999…) als Grenzwert (= 1).

- *Singulär* nennen Ruf und Gallin Herangehens- und Verstehensweisen, die im Erleben und Denken einer Person wurzeln. Singuläres ist – im Gegensatz zu regulären Sichtweisen – immer *personengebunden*. Es enthält, was eine Person in ihrer Auseinandersetzung mit einem mathematischen Inhalt macht, was sie als deren inhaltlichen Kern versteht. Es beinhaltet zudem persönliche Werte und Normen.[70] Singuläres äußert sich – wiederum mit Wagenschein – besonders stark in der „Sprache des Verstehens" [Wagenschein 1965, S. 162].
  Aus der normierenden Sicht der Regularität können vom Individuum vorgebrachte singuläre Sichtweisen falsch sein, etwa im Falle von Fehlvorstellungen. Folglich sind auch vom Hofes *deskriptiv feststellbare Schülervorstellungen* nach Ruf und Gallin *singulär*. Obwohl zwangsläufiger Bestandteil der Genese neuen mathematischen Wissens, sind singuläre Sicht- und Herangehensweisen von Mathematikerinnen und Mathematikern kaum je untersucht und dokumentiert worden.[71] Zwar stießen individuelle Ausprägungen natürlicher Zahlen und die räumlich-geometrische Anordnung der Menge der reellen Zahlen bei den frühen Psychologen auf Interesse.[72] In der mathematikdidaktischen Literatur des zwanzigsten Jahrhunderts jedoch wurden Schülervorstellungen – wenn

[69] So die Grundvorstellung einer Funktion als *Zuordnung* bzw. als *Objekt*. [vom Hofe 2003]

[70] Durch den Fokus auf individuell unterschiedliche Herangehensweisen und persönliche Werten bestehen Bezüge zu Bauersfelds Konzept subjektiver Erfahrungsbereiche (siehe S. 109, aber auch [Gallin & Ruf 1998, S. 21, 221]). Allerdings geht es bei Singularität um mehr als nur um rein fachliche Teilbereiche. Genauere Überschneidungen oder Unterschiede zwischen den beiden Konzepten scheinen bis heute nicht analysiert worden zu sein.

[71] Eine große Ausnahme stellt die Sammlung singulärer Beschreibungen mathematischer Phänomene und Herangehensweisen in [Hadamard 1949] dar. Das Buch beruht auf Selbstbeobachtungen und einer Untersuchung, die Hadamard um 1900 mit dem Psychologen Ribot zu den Arbeitsgewohnheiten von Mathematikern und Physikern durchgeführt hat.

[72] So beschreibt Hadamard, wie er sich eine große natürliche Zahl als „Punktwolke" vorstellt [Hadamard 1949, S. 76]. Als Beispiele singulärer „Zahlendiagramme" erwähnt vom Hofe Untersuchungen von [Schanoff 1911] und [Müller 1913], während Lorenz einige singuläre „Zahlenraumbilder" aus Arbeiten von [Galton 1880], [Galton 1883, S. 91, 97, 101], [Morton 1936] und [Carter 1983] zeigt. ([vom Hofe 1995, S. 107 f.], [Lorenz 1992, S. 139])

überhaupt – fast ausschließlich aus der Defizitperspektive untersucht.[73] Singuläres muss aber nicht zwingend falsch sein. Typisches Beispiel einer singulären, fachlich richtigen Sichtweise ist der Kreis als rotierende Strecke. Diese Sichtweise könnte grundsätzlich zu seiner Definition herangezogen werden.[74] Auch Gallins Kurzfassungen „Funktionen sind ein Verkleidungsspiel“[75] oder „der Sinus ist die Höhe meiner Fingerspitzen über der Tischplatte“[76] haben singulären Charakter und sind fachlich korrekt. Singuläre Sichtweisen, die an den Kriterien der fachlichen Norm gemessen falsch sind, sind zum Beispiel die im Schulkontext immer wieder anzutreffenden ‚Regeln‘ wie „$-x$ ist negativ“, „$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$“ oder „$2x-x=2$“.[77] Aber auch die additive Darstellung von multiplikativen Vorgängen muss nicht aus flüchtigem Arbeiten resultieren, sondern kann in Fehlvorstellungen wurzeln.[78] In diese Reihe gehört auch die Überbetonung des *Prozesses*, der hinter der Ungleichung „$0{,}999\ldots < 1$“ steht.[79] Sie unterscheidet sich von der (regulären)

---

[73] Als eine der ersten Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker hat Presmeg einen nichtnormativen Blick auf mathematische Schülervorstellungen geworfen und ein *Kategoriensystem* dafür entwickelt. In ihrer Dissertation geht sie der Frage nach, wie ein veranschaulichend-visualisierender Unterrichtsstil der Lehrperson die Präferenz von Lernenden beeinflusst, ebenfalls anschaulich-visuelle Vorstellungen beim Problemlösen einzusetzen. Dazu unterscheidet sie „concrete imagery (pictures-in-the-mind)“, „pattern imagery (pure relationships depicted in a visual-spatial scheme)“, „memory images of formulae“, „kinaesthetic imagery (imagery involving muscular activity)“ (beispielsweise das vorgestellte Nachfahren mit dem Finger) und „dynamic (moving) imagery“ (etwa das Scheren einer Figur) [Presmeg 1986, S. 43 f.]. Weiteres dazu siehe in Fußnoten auf S. 129 und S. 247.

[74] Dazu siehe [van der Waerden 1954, S. 166]. Weitere definitorische Sichtweisen des Kreises beruhen auf der ebenen Bewegung unter konstanter *Krümmung* oder unter konstantem *Sehwinkel* auf eine fest vorgegebene Strecke (Umfangwinkelsatz).

[75] Mit dieser Kernidee wird der Zuordnungscharakter $n \mapsto a_n$ im Fall von Zahlenfolgen $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$ hervorgehoben. [Ruf & Gallin 1998 a, S. 295]

[76] Dazu wird in Einheiten der Unterarmlänge gemessen. [Gallin & Ruf 1998, S. 38]

[77] Maier weist in diesem Zusammenhang auf die Rolle des *Sprachgebrauchs* hin. So wird statt von „subtrahieren“ umgangssprachlich von „wegnehmen“ gesprochen. Folglich bleibt 2 übrig, wenn vom Symbol $2x$ das x „weggenommen“ wird, eben „$2x-x=2$“. [Maier 1999, S. 56]

[78] Für weitere Beispiele zur Verwechslung von Plus- und Mal-Prozessen siehe [Weber 2004].

[79] Dazu folgender Auszug aus einem Schüleraufsatz zum Verständnis von $0{,}\overline{9}$: „Er fragte uns plötzlich, ob $0{,}\overline{9}$ nicht auch ein Name für 1 währe, denn zu 1 passt ja auch $\frac{1}{1}$ oder $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$ oder 1.0. Ich protestierte natürlich, denn von $0{,}\overline{9}$ zu 1 fehlt ja noch $0{,}\overline{0}1$. Zwar darf man in der Mathematik das 0,00000...1 nicht $0{,}\overline{0}1$ schreiben; aber wie soll es denn sonst kurz heißen? Ich bin ja nicht Albert Einstein, aber mein (noch) gesunder Menschenverstand sagt mir, dass es zwischen $0{,}\overline{9}$ und 1 ein winziges Stückchen gibt. Dieses Stückchen verkleinert sich natürlich, wenn 0,999 zu 0,9999 wird. Es wird von 0,001 zu 0,0001 kleiner, also: es ist immernoch da. Und so ist es auch mit einer tausendstelligen Zahl. Ein kleines Stück fehlt immer.“ [Farian & Jahnke 2005, S. 36, Schreibweise wie im Original]

Grenz*wert*betrachtung $0{,}999\ldots = 1$, in der das Gleichheitszeichen die Vermittlerrolle zwischen der Tendenz eines unendlichen Prozesses und einer festen, endlichen Zahl einnimmt.[80]

Erst dadurch, dass Singuläres aus dem Bereich des Privaten und Persönlichen herausgehoben und für den Unterricht zugänglich gemacht wird, wird eine Dialogische Didaktik möglich. Ruf und Gallin plädieren zum einen aus *pädagogischen* Gründen dafür, singuläre Herangehens- und Verstehensweisen aller Personen einzubeziehen, die am Unterricht beteiligt sind:

> „Alles dreht sich um authentische Begegnungen [...]. Das ist der entscheidende Unterschied zu anderen Unterrichtskonzepten. Gleichberechtigt und gleichwertig neben den Stoffen stehen die Menschen, die sich mit ihnen befassen. Darum ist die reguläre Fachsprache, die konventionelle Lösungstechnik, der perfekte Text nicht alleiniger Maßstab im Unterricht. In gleicher Weise maßgebend sind die je singulären, nicht vorhersehbaren Spuren der Lernenden, die sich auf die Fachprobleme einlassen und sie in ihre Sprache zu fassen versuchen.“ [Ruf & Gallin 1998 a, S. 48]

Zum anderen kann es nach Ruf und Gallin gerade aus *fachlicher* Sicht spannend sein, sich auf die singulären Sichtweisen von Schülerinnen und Schülern, die nicht der fachlichen Norm entsprechen, einzulassen, denn: „Auch scheinbar abwegige singuläre Erkundungen können Auswirkungen ins Reguläre haben.“[81] [Ruf & Gallin 1998 a, S. 257] Allerdings bedingt dies, dass Lehrende den Schülerinnen und Schülern einen Expertenstatus für ihre eigene Herangehens- und Verstehensweise zugestehen und dabei nicht ausschließlich fachliche Normen im Auge haben, sondern auch die Rolle des neugierigen Novizen einnehmen:

> „Dass auch Fehler ihre Pointe haben können, merkt man [...] nur, wenn man sich mit der Haltung in den Fehler einlebt, es könnte sich ja durchaus etwas Sinnvolles, vielleicht sogar eine *Perle*, darin verbergen.“ [Ruf & Gallin 1998 a, S. 248, Hervorhebung C. W.]

Gewiss ist die Einteilung von Sichtweisen in „singulär“ bzw. „regulär“ nicht auf ewig festgeschrieben, sondern durch die zugrunde liegenden Aushandlungsprozesse historisch bedingt. Auch verlaufen die Übergänge zwischen

[80] Obwohl einige der genannten singulären Sichtweisen in der Tradition beweglichen Denkens stehen, ist dies für Singuläres nicht von zwingender Notwendigkeit.
[81] Was das für den Mathematikunterricht heißen kann, wird in [Ruf & Gallin 1998 a, S. 240–257] und [Ruf & Gallin 1998 b, S. 126–134] erläutert.

Singulärem und Regulärem fließend (in Tab. 4.2 durch die Symbole „⇕" angedeutet). Eine ursprünglich singuläre Sichtweise kann sich – falls sie das entsprechende Potenzial in sich trägt – als reguläre Sichtweise durchsetzen, wie gerade die Entwicklung mathematischer Begriffe lehrt.[82] Einer regulären Sichtweise kann ihr normierender Anspruch auch wieder entzogen werden, wodurch sie zu einer singulären relativiert wird.[83] Dieses Wechselspiel zwischen ausgehandelter Norm und individueller Herangehens- und Verstehensweise wird von der Dialogischen Didaktik zum *didaktischen Prinzip* erhoben.

Die unterrichtspraktische Umsetzung zeigt Abbildung 4.4 (nach [Ruf & Gallin 1998 b, S. 12], Bearbeitung C. W.) – der Unterricht im Sinne der Dialogischen Didaktik läuft in vier zyklisch wiederkehrenden Phasen ab :

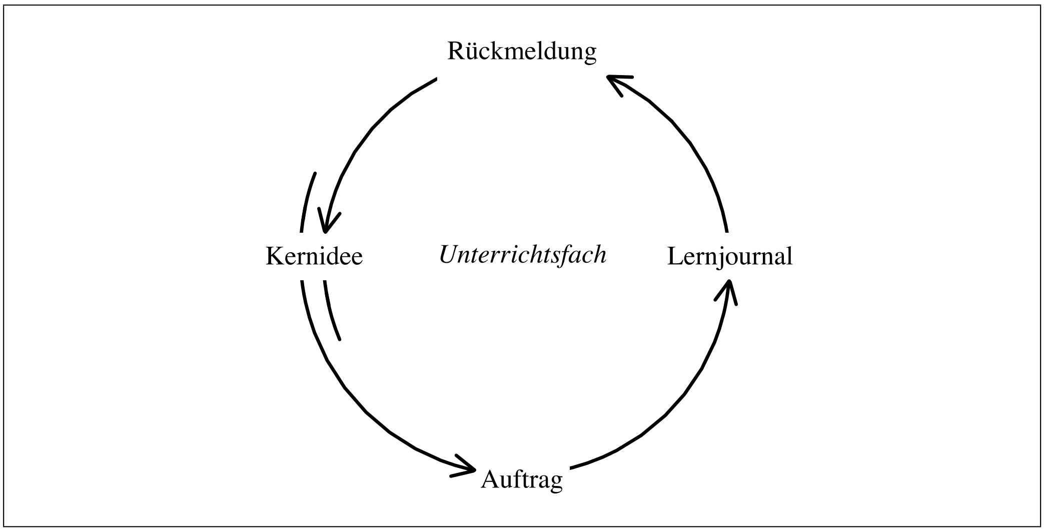

Abb. 4.4: Unterrichtskonzept der Dialogischen Didaktik nach Gallin und Ruf

1. Zu Beginn einer Unterrichtseinheit fasst die Lehrperson als Expertin für das Fach ihre singuläre (nach der fachlichen Norm jedoch korrekte) Sichtweise eines mathematischen Inhalts pointiert in einer „Kernidee"

[82] Zur Entwicklung mathematischer Begriffe und Theorien siehe etwa [Fischer & Malle 1985, S. 142–164]. Am Beispiel der Begriffe von Funktion, Wahrscheinlichkeit und Vektor wird ausgeführt, wie bei der Exaktifizierung von Begriffen Bedeutungsaspekte *verloren* gehen können und wo die Möglichkeiten und Grenzen der Exaktifizierung liegen. Für die Geschichte des Funktionsbegriffs siehe auch [Krüger 2000 a, S. 37–57] oder [Hischer 2002].

[83] So war im 18. Jahrhundert allgemein akzeptiert, dass eine unendliche Reihe, deren Summanden gegen Null konvergieren, selbst auch konvergiert – bis Ende des 18. Jahrhunderts die harmonische Reihe als Gegenbeispiel gefunden wurde.

zusammen, zum Beispiel: „Funktionen sind ein Verkleidungsspiel“ oder „der Sinus ist die Höhe meiner Fingerspitzen über der Tischplatte“. Damit bringt die Lehrperson den ‚Witz‘, das heißt die Bedeutung einer Sache *vor* ihrer Bearbeitung auf einen kurzen Nenner. Kernideen sollen Schülerinnen und Schüler zum sachbezogenen Handeln auffordern und können beim Aufbauen neuer Begriffe und Theorien eine Hilfe sein.[84]

2. Mit einem „Auftrag“ werden Schülerinnen und Schüler herausgefordert, sich auf die Kernidee einzulassen und sich aus ihrer eigenen Sicht damit auseinanderzusetzen.[85] Im „Lernjournal“ dokumentieren sie wie in einem Tagebuch ihren „singulären Standort“, den sie in der authentischen Begegnung mit der Sache einnehmen. Sie notieren nicht nur, welche Vermutungen und Überlegungen sie anstellen, welche Versuche sie starten, welche Irrwege sie begehen, welche Ergebnisse gefunden werden, sondern – immer noch in der sachbezogenen Auseinandersetzung – was sie ärgert, irritiert oder freut. Weil das Lernjournal Entwurfscharakter aufweist, unterscheidet sich die Darstellung (Formulierung, Wortwahl, Anordnung) der Einträge von Fertigprodukten – im Lernjournal herrscht die „Sprache des Verstehens“. In ihren Einträgen dokumentieren die Schülerinnen und Schüler ihre singuläre Herangehens- und Verstehensweise, die fachlich ohne weiteres Fehler enthalten.[86]

3. Anschließend liest die Lehrperson die Lernjournale aller Schülerinnen und Schüler und schreibt die „Rückmeldung“. Im Vergleich mit der ihr bekannten fachlichen Norm, aber auch anhand von Fragen wie „Wo wurde besonders intensiv oder originell gearbeitet? In welchem Bearbeitungsweg steckt eine Perle?“ bewertet sie die Einträge nach einem einfachen Schema. In dieser Phase sind die Schülerinnen und Schüler Experten für ihre Auseinandersetzung mit dem Fach, an der die Lehrperson Interesse zeigt.[87]

[84] Als Nebeneffekt sind Kernideen wie die letztgenannte leichter memorierbar als Lehrbuchdefinitionen im Stil von „der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse“. Für Ausführliches zum Konzept der Kernidee siehe [Gallin & Ruf 1998, S. 31–41, 75 f.], [Ruf & Gallin 1998 a, S. 59–63] und [Ruf & Gallin 1998 b, S. 17–46].
[85] Dazu können auch Aufgaben aus Lehrmitteln dienen [Ruf & Gallin 1998 a, S. 178]. Zu Aufträgen siehe [Ruf & Gallin 1998 a, S. 66–69] und [Ruf & Gallin 1998 b, S. 49–85].
[86] Ausführliches zum Lernjournal siehe [Gallin & Ruf 1998, S. 143–146], [Ruf & Gallin 1998 a, S. 63–71, 91–94] und [Ruf & Gallin 1998 b, S. 89–143].
[87] Ausführliches zur Rückmeldung und Bewertung siehe [Ruf & Gallin 1998 a, S. 72–90] und [Ruf & Gallin 1998 b, S. 147–176].

4. Die Einträge der Schülerinnen und Schüler, die „Auswirkungen ins Reguläre" haben, werden vom Lehrer bzw. von der Lehrerin in einer „Autographensammlung" zusammengestellt. Diese Sammlung wird von ihr – eventuell unter einer neuen Kernidee – mit einem Auftrag verbunden und zurück in die Klasse gespeist. Damit kann der Kreislauf von neuem beginnen (in der Abb. 4.4 durch eine Überlappung angedeutet).[88]

Dialogisch Unterrichtende haben das didaktische Kunststück zu vollbringen, ihr Fachwissen in Gestalt von Kernideen – das heißt Grundvorstellungen mit singulärem Anstrich – zu formulieren, in Rückbezug auf ihr Fachwissen den singulären Standortbestimmungen der Schülerinnen und Schüler nachzugehen, diese zu bewerten und als Grundlage für eine nächste Kernidee zu nutzen. Ihre Hauptarbeit liegt – im Unterschied zum herkömmlichen Unterricht – in der *Nachbereitung* des Unterrichts, im Lesen und Beurteilen der Lernjournaleinträge und im Herstellen der Autographensammlung. Diese Nachbereitung – und deshalb das geschlossene Kreismodell – ist auch schon ein wesentlicher Bestandteil der Vorbereitung für die nächste Unterrichtseinheit. Gallin und Ruf sprechen denn auch von der „Vorbereitung aus der Rückschauperspektive" [Ruf & Gallin 1998 b, S. 34]. Die Schülerinnen und Schüler müssen bereit sein, sich nicht nur auf die singulären Grundvorstellungen ihrer Lehrperson einzulassen und sich damit auseinanderzusetzen, sondern sich auch mit den schriftlich festgehaltenen Überlegungen ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler zu beschäftigen. Ihre Hauptarbeit besteht in der schriftlichen Dokumentation solcher Auseinandersetzungen, wobei sie ihre Vorstellungen ins Spiel bringen müssen. Durch die Verschriftlichung im Lernjournal werden diese ‚materialisiert', verhandelbar und weiterentwickelt.[89]

[88] Ausführliches zum Instrument der Autographensammlung siehe [Ruf & Gallin 1998 b, S. 244–250, 262–266]. Zur Rolle von Schülertexten als Lehrmittel im Mathematikunterricht siehe [Ruf & Gallin 1998 b, S. 167–176].

[89] Um zu zeigen, dass Unterrichtsqualität nicht allein von der Qualität des Lehrangebots, sondern mindestens ebenso sehr von der Qualität der Nutzung durch die Lernenden abhängt, modelliert Fend den traditionellen schulischen Unterricht als Wechselspiel von *Angebot und Nutzung*: Die Lehrperson bietet fachliche Inhalte an, die Lernenden reagieren darauf, indem sie solche Angebote ablehnen, ignorieren, übernehmen oder bearbeiten. ([Fend 1995, S. 186 ff.] und [Fend 1998, S. 321 ff.])

Wie Badr Goetz herausstreicht, sind im dialogischen Unterricht die Rollen des Anbietens und Nutzens nicht fest zugewiesen, sondern sie *wechseln*. So nutzen dialogisch Unterrichtende die Schülerangebote, weil sie die Lernjournale auf Auswirkungen ins Reguläre hin lesen und dies zur Entwicklung ihres nächsten Angebots nutzen. Alle an einem dialogischen Unterricht beteiligten Personen, auch die Schülerinnen und Schüler, stellen Angebote bereit, die von ihrem Gegenüber genutzt werden. Damit basiert die Dialogische Didaktik auf einem *erweiterten Angebots-Nutzungsmodell*. [Badr Goetz 2007, S. 22–25, S. 58]

Insgesamt gesehen liegt die Überzeugungskraft der Dialogischen Didaktik darin, dass sie in langjähriger Praxis ihrer Autoren erprobt bzw. praktiziert wurde, den Mathematikunterricht in all seinen Phasen umfasst sowie bekannte pädagogische Forderungen aufgreift.[90] So macht sie ernst mit der alten Forderung, die Schülerinnen und Schüler dort ‚abzuholen', wo sie stehen, indem die Texte in den Lernjournalen als Ausgangsmaterial für den weiteren Unterricht dienen. Aber nicht nur die singulären Standortbestimmungen der Lernenden, sondern auch singuläre Sichtweisen auf Fachinhalte durch die Lehrenden dienen dem Unterricht als Ausgangspunkte, ja sogar als Anker.

Problematisch ist – so auch immer wieder in entsprechenden Fortbildungsveranstaltungen von Lehrerinnen und Lehrern der SI und SII vorgebracht – der Zeitaufwand, den dialogisches Unterrichten voraussetzt.[91] Auch fehlende Handbücher für Lehrende der SI und SII mögen eine breitere Rezeption der Dialogischen Didaktik bislang erschwert haben.[92]

Als weiterer Kritikpunkt sei angeführt, dass die Dialogische Didaktik davon ausgeht, Lernende seien dazu bereit, ihre singuläre Auseinandersetzung mit einem mathematischen Auftrag zu thematisieren und sich schriftlich auch mit fehlgeschlagenen Lösungsversuchen zu befassen. Besonders für solche Schülerinnen und Schüler, die erst auf der Sekundarstufe II mit Lernjournalen bekannt gemacht werden, ist bis zu diesem Zeitpunkt nur Reguläres Gegenstand des Mathematikunterrichts und Singuläres findet bestenfalls im Bereich mündlicher Kommunikation statt. Deshalb stellt die Erwartung, dass Schülerinnen und Schüler ihre singulären Auseinandersetzungen schriftlich darstellen, eine gewisse *Einstiegsschwelle* für dialogisches Lernen dar.[93]

4.2.3 „Lebensweltliche Vorstellungen" bei Lengnink

Auch Katja Lengnink schlägt ein Unterrichtsarrangement vor, in dem Schülervorstellungen für den Unterricht produktiv gemacht werden können. Es ist nicht so umfassend wie das Konzept von Ruf und Gallin, dafür nehmen die Schülervorstellungen bei ihr eine explizitere Stellung ein: „Vorstellungen sind

[90] Dazu siehe auch Fends und Sittas Nachwort in [Gallin & Ruf 1998, S. 205 f.] sowie Badr Goetz' gymnasialpädagogische Fundierung der Dialogischen Didaktik in [Badr Goetz 2007].
[91] Siehe etwa [Badr Goetz 2007, S. 196 f.]. – M. E. ist es nicht nur der Zeitaufwand, der Lehrerinnen und Lehrer vor dem dialogischen Unterrichten abhält, sondern auch die Notwendigkeit, auf eine instruierende Haltung zu verzichten zugunsten einer Haltung, die sich konsequent für die Auseinandersetzung der Lernenden mit fachlichen Inhalten interessiert.
[92] Für die Grundschule gibt es sie, siehe [Gallin & Ruf 1995] und [Ruf & Gallin 1999].
[93] Weshalb Vorstellungsübungen diese Schwelle senken können, wird ab S. 230 f. ausgeführt.

Kostbarkeiten, die es zu pflegen gilt – sie haben ihren Wert und sind zunächst weder richtig noch falsch.“ [Lengnink 2005 a, Folie 4]

Mit ihrer pädagogischen Haltung, tatsächlich vorhandene, aus dem Alltag motiverte Schülervorstellungen – Lengnink spricht von „*lebensweltlichen Vorstellungen*“ – ohne Defizitorientierung anzugehen und an den Anfang des Unterrichts zu stellen, respektiert sie den persönlichen, *singulären* Charakter von Vorstellungen und weist ihnen eine entscheidende lernpsychologische Bedeutung zu.[94] In ihrem Artikel *Abhängigkeit von Größen – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt*, der ein Projekt in der Sekundarstufe I zum Thema „Funktionen“ thematisiert, beschreibt sie die ersten drei Schritte ihres Unterrichtskonzepts wie folgt:

- Als Erstes erhalten die Schülerinnen und Schüler – unter Angabe eines Beispiels – den Arbeitsauftrag, Material aus ihrem Alltag zur „Abhängigkeit von Größen“ zu suchen, zu sichten und auf einem Plakat zusammenzustellen. Es geht darum, „diejenigen Vorstellungen bei den Lernenden zu aktivieren, die für den mathematischen Gegenstand wichtig sind.“

- Anschließend fanden Unterrichtsgespräche über die auf den Plakaten dargestellten Beispiele statt. Die von den Schülerinnen und Schülern entwickelten Auffassungen zur „Abhängigkeit von Größen“ werden in einige Gruppen sortiert.

- Schließlich werden diese gruppierten Schülervorstellungen mit der von der Lehrerin eingeführten, spezifisch mathematischen Sicht auf funktionale Abhängigkeit konfrontiert.[95] Im Projekt geht es nicht darum, die lebensweltlichen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler durch die mathematische Grundvorstellung zu ersetzen, sondern Verbindungen wie auch Brüche zwischen der Lebenswelt und der mathematischen

[94] Lengninks Bezeichnung „lebensweltliche Vorstellungen“ lehnt sich explizit an Habermas’ Begriff der Lebenswelt an [Lengnink 2003]. Damit steht ihre Auffassung von Vorstellungen derjenigen der Naturwissenschaftsdidaktik nahe, die untersucht, wie aus alltäglichen Erfahrungen stammende „Alltagsvorstellungen“ von Phänomenen und Begriffen – etwa der Verbrennung oder der Energie – das Lernen beeinflussen [Duit & Häußler 1997, S. 429 ff.]. Für eine aktuelle Bibliographie zu Schüler- und Lehrervorstellungen im naturwissenschaftlichen Unterricht siehe [Duit 2006].

[95] Lengninks Verständnis von Funktionen ist sehr allgemein: „Abhängigkeiten, bei denen eine Größe schon aufgrund der anderen Größe eindeutig festliegt, nennt man funktionale Größen.“ Damit sind in ihrem Verständnis die bereits genannten Grundvorstellungen wie Zuordnung und Kovarianz enthalten. [Lengnink 2005 b, S. 15 f.]

> Welt herauszuarbeiten. Dadurch können mathematische Begriffsfassungen als mögliche Abstraktion und Idealisierung erkannt und angeordnet werden. [Lengnink 2005 b, S. 14 f.]

Damit lässt sich das Unterrichtskonzept – Lengnink nennt es „reflektierend Vorstellungen aufbauen" [Lengnink 2005 a, Folie 7] – folgendermaßen zusammenfassen:[96]

1. Aktivieren von lebensweltlichen Vorstellungen durch Handlungssituationen

2. Verfügbarmachen der lebensweltlichen Vorstellungen durch Versprachlichung

3. Erkennen und Einordnen der mathematischen Begriffsfassung als mögliche Abstraktion und Idealisierung im Diskurs

Schülerinnen und Schüler sollen sich also die mathematischen Grundvorstellungen nicht einfach ‚überstülpen' (lassen), sondern diese emanzipiert und reflektiert neben ihre lebensweltlichen Vorstellungen stellen. Auch geht es Lengnink nicht einfach darum, einen „didaktischen Kunstgriff" für einen gelungeneren oder bewussteren Einstieg in ein mathematisches Gebiet beziehungsweise für den Aufbau von Expertenwissen anzubieten [Lengnink 2003, S. 19]. Vielmehr will sie „gemeinsam mit Schülerinnen und Schülern den Nutzen und die Grenzen mathematischer Beschreibung von Welt analysieren" [ebd., S. 9], um ein „vernünftiges realistisches Verhältnis zur Mathematik aufzubauen" [ebd., S. 19]. Dies sieht sie als zentral an für einen Mathematikunterricht, der „zum mündigen Umgang mit Mathematik anregen will" [ebd., S. 9].[97]

Insgesamt gesehen liegt die Stärke von Lengninks Arbeit aus Sicht der Didaktik darin, dass in ihr die Erkenntnisse der Forschung zu Vorstellungen in einer praktikablen Handlungsanleitung für Lehrkräfte zusammengefasst werden.[98] Aus Sicht der Mathematiklehrperson liegt die Stärke ihres Unter-

[96] Für die bildungstheoretischen Hintergründe siehe [Lengnink 2003].

[97] Um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen: Lengnink vertritt mit Peschek die Auffassung, dass mathematisches Denken *nicht als Fortsetzung* des Alltagsdenkens erlernbar ist. Sie geht davon aus, dass jenes Lernen am ehesten Chancen auf Erfolg hat, welches den *Wechsel* zwischen beiden Denkformen in beiden Richtungen thematisiert und reflektiert. [Peschek 2001]

[98] Dass die große Anzahl von Untersuchungen zu Vorstellungen nur selten in praktikable Handlungsanleitungen für Unterrichtende münden, bedauern schon [Frey & Frey-Eiling 2004, Kap. 9.1].

richtskonzepts in der Möglichkeit, dass es im Unterricht unmittelbar und einfach eingesetzt werden kann. So lässt es sich mehr oder weniger einem herkömmlichen Unterricht voranstellen und wirkt von dort auf den weiteren Unterrichtsverlauf. Schülerinnen und Schüler werden dazu angeregt, Bezüge zu Begriffen aus ihrer Lebenswelt zu schaffen oder bereits bestehende Bezüge ans Licht zu bringen. Brüche und Verbindungen zwischen Grundvorstellungen und lebensweltlichen Vorstellungen werden thematisiert und im Unterrichtsgespräch analysiert mit dem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler die von ihren Lehrkräften vorgebrachten Grundvorstellungen nicht einfach nachkonstruieren, sondern sie durch eine Konfrontation der Welt der Mathematik mit der Welt des Alltags aufbauen.

Leider wurde dieses Unterrichtskonzept bis heute erst für den Aufbau eines mathematischen Begriffs – dem der mathematischen Funktion – beschrieben und dargestellt. Was das Konzept für andere mathematische Prozesse – etwa das Vermuten oder Beweisen von Sätzen – bedeutet bzw. wie es dafür aussehen könnte, ist noch offen.

4.2.4 Fazit

Der modernen Mathematikdidaktik sind verschiedene Theorien bekannt, die *Vorstellungsinhalte* als *wesentliche Determinanten des Lernens* fokussieren. So geht vom Hofe in seinem Grundvorstellungskonzept davon aus, dass sich die Bedeutung von mathematischen Inhalten im Aufbau von „(visuellen) Repräsentationen bzw. Verinnerlichungen“ konstituiert, infolgedessen er für die Ausbildung tragfähiger inhaltlicher Vorstellungen plädiert. Damit hat er ein Begriffsverständnis von Grundvorstellung, das sowohl Wahrnehmungs- als auch Handlungsaspekte aufweist. Allerdings verwendet er den Begriff in erster Linie im normativ orientierten Sinne.

Mit vom Hofe teilen Gallin und Ruf sowie Lengnink die Überzeugung, dass Vorstellungen eine zentrale Rolle beim Lernen von Mathematik spielen. Sie praktizieren Unterrichtsformen, in denen Schülerinnen und Schüler aufgefordert sind, ihre singulären Vorstellungen als Ausdruck ihrer eigenen Kräfte ins Spiel zu bringen und damit eine anpassungsorientierte Haltung hinter sich zu lassen. Dabei interessieren sich Gallin und Lengnink für singuläre Vorstellungen weniger im Hinblick auf ihre fachliche Korrektheit als vielmehr im Hinblick auf ihren produktiven, den Lernprozess unterstützenden Charakter. Während bei Lengnink die lebensweltlichen Vorstellungen ganz gezielt zu Beginn des Unterrichts angesprochen werden, damit sie anschließend den regulären Vorstellungen des Fachs gegenübergestellt werden können, nimmt der Mathematikunterricht bei Gallin bei singulären, auf ein mathematisches Thema bezogenen Vorstellungen der Lehrkräfte (Kernidee im Auftrag) und der Schülerinnen und Schüler (Bearbeitung des Auftrags im Lernjournal) ihren Ausgang. Der Fokus der Arbeiten von Gallin und Ruf als auch derjenigen von Lengnink liegt also weniger im begrifflich-theoretischen als vielmehr im unterrichtspraktischen Bereich.

Damit lautet unter Bezug auf vom Hofe, Gallin und Ruf sowie Lengnink eine weitere Begründung für das Unterrichtsinstrument mathematischer Vorstellungsübungen wie folgt (siehe Forschungsfrage *(F2c)*, S. 83):[99]

4. Die Ausbildung regulärer Vorstellungen im Mathematikunterricht bedarf der Ausbildung *singulärer Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen.* In Vorstellungsübungen werden singuläre Vorstellungen nicht einfach regulären Vorstellungen gegenübergestellt, sondern sie dienen dazu, *regulären Vorstellungen im Bereich persönlicher Werte und Normen Bedeutung zu verleihen.*

Für die vorliegende Studie ist vom Hofes Begriffsaufarbeitung relevant, weil sich das in folgendem Abschnitt 4.3 beschriebene Begriffsverständnis von Vorstellungen an seine Auffassung von Grundvorstellungen anlehnen wird. Hier wie dort werden – über kognitionspsychologische Konzepte hinausgehend – Vorstellungen als *visuelle Repräsentationen* verstanden, die *gedankliches Handeln* unterstützen sowie beim Lernen und Verstehen als *Bedeutungsträger* zwischen außermathematischen Zusammenhängen und mathematischen Inhalten vermitteln. Vom Hofes Defizitperspektive auf deskriptiv feststellbare Schülervorstellungen ist jedoch zu eng, weshalb mit Ruf und Gallin im weiteren Verlauf dieser Studie auch singuläre Aspekte von Schülervorstellungen, die fachlichen Normen nicht entsprechen, ins Auge gefasst werden. In eine ähnliche Richtung zielt Lengninks Gegenüberstellung von Grundvorstellungen mit den lebensweltlichen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Entsprechend werden *singuläre Schülervorstellungen eine von Grundvorstellungen unabhängige Position erhalten* und *als ihre Gegenspieler fungieren.*[100]

Schließlich werden die beiden Unterrichtskonzepte der Dialogischen Didaktik und des reflektierenden Aufbaus von Vorstellungen in Abschnitt 6.3 herangezogen, um das Unterrichtsinstrument der mathematischen Vorstellungsübungen auszubauen. Sie zeigen Möglichkeiten auf, wie Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern nicht nur aktiviert und bewusst gemacht, sondern auch für den weiteren Unterrichtsverlauf genutzt werden können.

[99] Für die ersten drei Begründungen siehe S. 104 f.
[100] Ein erster Versuch in diese Richtung wird in [Weber 2005] beschrieben.

4.3 Vorläufige Bestimmung des Vorstellungsbegriffs

Was Vorstellungen ‚wirklich' sind, soll (und kann) auch mit dieser Arbeit nicht abschließend festgelegt werden. Vielmehr wird zum Schluss dieses Kapitels die Bedeutung von Vorstellungen als *wesentliche Determinanten des Lernens* durch eine vorläufige Begriffsbestimmung unterstrichen und damit die Forschungsfrage *(F2a)* beantwortet (S. 83). Auf dieser präzisierten begrifflichen Grundlage werden im nächsten Kapitel Gesichtspunkte entwickelt, nach denen sich Vorstellungsübungen analysieren lassen (siehe S. 143 ff.).

Der Vorstellungsbegriff im Rahmen dieser Arbeit knüpft an vom Hofes Begriff der Grundvorstellung an. Er wird im Rahmen dieser Arbeit sowohl in einem denk- als auch einem lernpsychologischen Bedeutungsfeld angesiedelt, und zwar folgendermaßen:

Denkpsychologischer Vorstellungsbegriff: Vorstellungen und Vorstellen treten im Zusammenhang mit Gedanken und Denken auf, und zwar in einem dualistischen Sinne:

- Ausgehend von der Wahrnehmung realer Sachverhalte und von eigenen Handlungen werden durch Verinnerlichung *Vorstellungsbilder* – kurz: Vorstellungen – aufgebaut. Sie können *visueller*, aber auch *taktiler* oder *auditiver* Natur sein.
- Dadurch wird *Vorstellungshandeln*, das heißt *gedankliches Bearbeiten* und *Bewegen* – kurz: Vorstellen – möglich.

Dazu einige Ausführungen (für eine schematische Darstellung siehe Abb. 4.5):

- Sinnliche Wahrnehmung ist gemäß der konstruktivistischen Grundannahme kein passiv-rezeptiver, sondern ein im Nachzeichnen wahrgenommener Sachverhalte gründender und deshalb konstruktiver Vorgang, der zu *Vorstellungsbildern* führt. Aufgrund ihrer Genese können sie *visuelle*, aber auch *taktile oder auditive Merkmale* aufweisen.
- Wahrnehmen als Konstruktion ist eine spezifische Handlung. Allgemeiner formuliert: Es können Vorstellungen aufgebaut werden, indem eigene Handlungen und deren Auswirkungen erfahren, analysiert und ver-

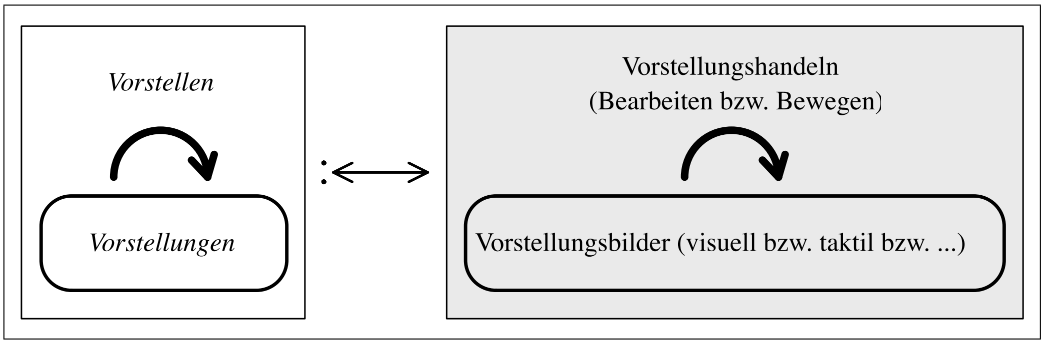

Abb. 4.5: Denkpsychologischer Vorstellungsbegriff

innerlicht werden. Vorstellungen sind gedankliche Objekte, die letztlich auf konkreten Handlungen basieren.[101]

- *Vorstellungshandeln* ist eine Form *gedanklichen Operierens an und mit Vorstellungsbildern*. Vorstellungsbilder können nicht nur gedanklich bearbeitet werden, sie können – im Sinne des beweglichen Denkens der Meraner Reform – auch bewegt werden.

- Vorstellung, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verstanden wird, ist bewusste Vorstellung, da sie mit *Vorstellungshandeln* im Zusammenhang steht und damit mit aktiven und bewussten Prozessen.[102]

- Der *aktive* und *konstruktive* Charakter von Vorstellung wird durch die Formulierung des *Aufbaus* von Vorstellungen und des Vorstellens als Vorstellungs*handeln* hervorgehoben.

- Vorstellungsbilder sind Objekte, die durch Vorstellungshandlungen verändert werden können. Umgekehrt beeinflussen Vorstellungsbilder auch die Art und Weise, wie Vorstellungshandlungen aussehen – Vorstellungsbilder ermöglichen Vorstellungshandeln und bestimmen es dadurch.[103]

[101] Vom Hofe spricht im Falle von Vorstellungen, die auf Handlungen zurückgehen oder Handlungsschemata enthalten, von Handlungsvorstellungen (siehe S. 107 sowie [vom Hofe 1995, S. 63, 81]). Um auszudrücken, dass vorliegende Arbeit den Akt des Handelns an und mit Vorstellungen *gleichwertig* neben die Objekte, das heißt die Vorstellungsbilder, stellt, wird in ihr von Vorstellungshandeln bzw. Vorstellungshandlungen gesprochen.

[102] Damit ist der beschriebene Vorstellungsbegriff enger als derjenige der Tiefenpsychologie, die unter Vorstellungen auch Unbewusstes wie Assoziationen oder Traumbilder versteht.

[103] Beispielsweise ermöglicht das Vorstellungsbild des Zahlenstrahls für die Menge der reellen Zahlen aufgrund seiner geometrisch-räumlichen Ausprägung, von der ‚Nähe' zweier Zahlen zu sprechen oder davon, dass sich eine Zahlenfolge einer Zahl ‚annähert'.

- Damit stehen der Akt des Vorstellens und die Objekte der Vorstellungen in Wechselwirkung miteinander, sie stehen in einem einander bedingenden und gleichzeitig voneinander abhängenden, *dualistischen Verhältnis* zueinander (in Abb. 4.5 durch „$\curvearrowright$“ gekennzeichnet).[104]

- Da der hier erläuterte Vorstellungsbegriff über Vorstellungsbilder hinaus auch Vorstellungshandlungen umfasst, geht er über räumlich-geometrisches Vorstellungsvermögen hinaus.[105] Er hat auch nichts mit „beliefs“ zu tun.[106]

Diese denkpsychologische Bestimmung von *Vorstellen* und *Vorstellungen* im Sinne von Vorstellungshandeln und Vorstellungsbildern stellt eine Äquivalenzbehauptung dar, die wie in Abbildung 4.5 dargestellt zur definitorischen Festsetzung von Vorstellen und Vorstellungen dient (durch „$:\leftrightarrow$“ gekennzeichnet). Sie wird im nächsten Kapitel im Hinblick auf die Analyse von Vorstellungsübungen weiter präzisiert (siehe S. 143 ff.).

Vorstellungen sind also nicht einfach vorhanden, sondern lassen sich durch Vorstellungshandlungen *aufbauen* und *verändern*.[107] Darauf basieren Lernprozesse ganz besonders. Für das Lernen von Mathematik ergibt sich Folgendes:

Lernpsychologischer Vorstellungsbegriff: Vorstellungen und Vorstellen spielen im Zusammenhang mit Lernen von Mathematik folgende Rollen:

- Vorstellungen und Vorstellen knüpfen an *bekannte Bild- und Handlungszusammenhänge* an.

[104] Wie bereits in der Fußnote auf S. 117 erwähnt, macht Presmeg für das Bearbeiten mathematischer Aufgaben fünf unterschiedliche Vorstellungsformen aus. Dabei sind „pictures-in-the-mind“, „pure relationships depicted in a visual-spatial scheme“ und „memory images of formulae“ den *Vorstellungsbildern* zuzurechnen, während „imagery involving muscular activity“ und „dynamic imagery“ unter *Vorstellungshandlungen* zu subsumieren sind.

[105] Für Genaueres dazu siehe die entsprechende Fußnote auf S. 202.

[106] Selbst wenn „beliefs“, das heißt Überzeugungen und Einstellungen (etwa was Mathematik ist oder wie Mathematiklernen vor sich geht) Handlungen beeinflussen, sind sie nicht auf einer mathematisch-inhaltlichen Ebene, sondern auf einer Metaebene anzusiedeln.

[107] Von außen kann nur mittelbar auf Vorstellungen eingewirkt werden, da Vorstellung in ihrem Zusammenhang mit Denken von außen *nicht* beobachtbar ist. Umso mehr interessiert sich die Forschung dafür, was ‚im Kopf passiert‘. Die wohl älteste dazu verwendete Methode ist die auch in Vorstellungsübungen zum Zuge kommende *Introspektion.* Neben der Methode „lauten Denkens“ werden heute auch bildgebende Techniken eingesetzt oder Augenbewegungen verfolgt (siehe etwa Schwanks entsprechende Experimente in [Schwank 2003, S. 73 ff.]).

- Vorstellungen und Vorstellen liegen nicht nur *mathematischen Begriffen* und *Verfahren* zugrunde, sondern mathematische Inhalte beeinflussen die Vorstellungen auch.
- Vorstellungen und Vorstellen sind nicht nur von *singulärem*, sie können auch von *regulärem* Charakter sein.

Auch dazu einige Erläuterungen (für eine Darstellung siehe Abb. 4.6):

- Indem Vorstellungen und Vorstellen an Bild- und Handlungszusammenhänge anknüpfen, liegen sie zwischen realen Gegenständen bzw. konkreten Handlungen und mathematischen Begriffen bzw. Verfahren (in Abb. 4.6 durch „$\leftrightarrow$" gekennzeichnet).
- In ihrer Zwischenposition können Vorstellungen und Vorstellen *als Mittler* zwischen Real-Konkretem und Mathematisch-Abstraktem dienen. Baut eine lernende Person zu einem mathematischen Inhalt Vorstellungen auf, die an bekannte Bild- und Handlungszusammenhänge anknüpfen, kann sich für sie Sinn bzw. Bedeutung konstituieren. *Als Bedeutungsträger kommen Vorstellungen beim Lernen und Verstehen mathematischer Inhalte eine Schlüsselrolle zu.*[108]
- Die Spezifizierung in singuläre und reguläre Vorstellungen erfasst den wissenssoziologischen Aspekt von Vorstellungen:[109]
  - *Singuläre Vorstellungen* geben wieder, was in den Augen *einer Person* einen mathematischen Inhalt (besonders gut) erfasst, seinen Sinn und seine Bedeutung ausmacht. Sie wurzeln im Erleben und Denken eines Individuums und werden deshalb als etwas *Persönliches* erlebt. In singulären Vorstellungen kommen individuelle Bedeutungsüberschüsse wie Erfahrungen, Bezüge zur eigenen Lebenswelt und Gefühle des Individuums zum Ausdruck. Aus fachlicher Sicht können singuläre Vorstellungen ‚richtig' (etwa in Form von Kernideen) oder ‚falsch' (Fehlvorstellungen) sein.[110]

[108] Vergleiche auch mit der schematischen Darstellung des Unterrichtskonzepts zur Ausbildung von Grundvorstellungen nach vom Hofe (Abb. 4.3, S. 111).
[109] Damit beziehen sich die Begriffe des Singulären und Regulären in dieser Arbeit anders als bei Ruf und Gallin weniger auf schriftliche Darstellungen als vielmehr auf Vorstellungen.
[110] Vom Hofe spricht an dieser Stelle von deskriptiv feststellbaren Schülervorstellungen, Lengnink von lebensweltlichen Vorstellungen.

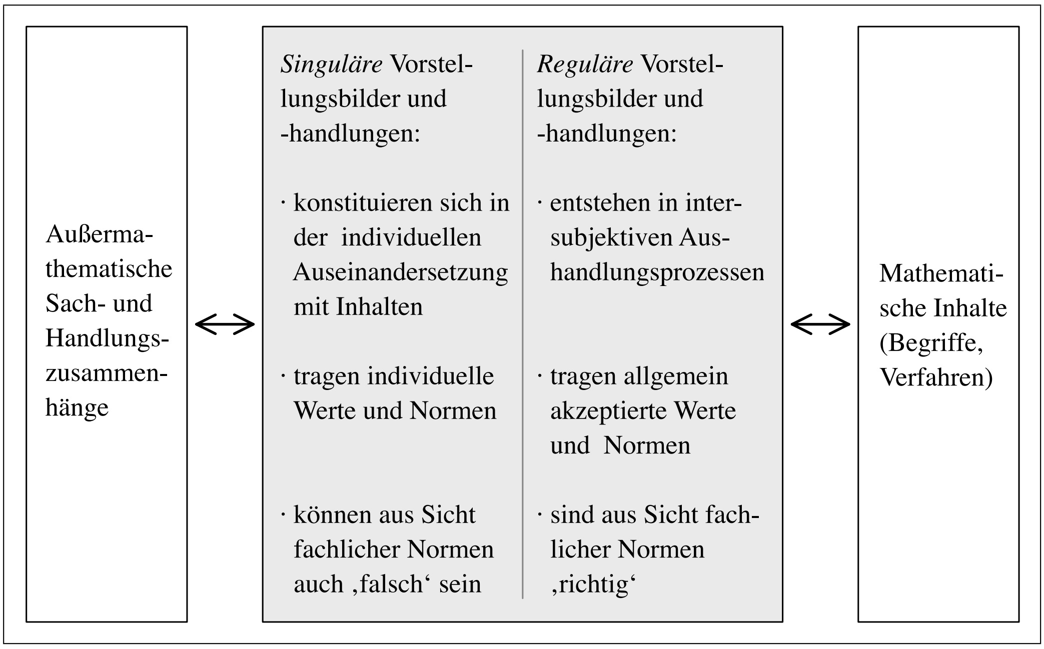

Abb. 4.6: Lernpsychologischer Vorstellungsbegriff

– Vorstellungen sind nicht immer singulär, sie können auch regulären Charakters sein, etwa wenn singuläre Vorstellungen normativ gedeutet werden. Da *reguläre Vorstellungen* intersubjektiv ausgehandelt werden und folglich allgemein akzeptierte Bedeutungen und fachliche Normen wiedergeben, sind sie *Gegenspieler* von singulären Vorstellungen. Sie stehen hinter mathematischen Inhalten, die in Lehrbüchern – als wichtiges Medium zur Vermittlung fachlicher Normen – dargestellt werden.[111]

Diese lernpsychologische Auffassung, die Vorstellungen als Mittler zwischen außermathematischen Zusammenhängen und mathematischen Inhalten ansiedelt und singuläre von regulären Vorstellungen unterscheidet, ist schematisch in Abbildung 4.6 dargestellt. In diesem Spannungsfeld agieren mathematische Vorstellungsübungen, und hier wird ihre Wirksamkeit gesucht.

[111] Vom Hofe spricht hier von normativ geprägten Grundvorstellungen.

5 Analyse des Unterrichtsinstruments

In diesem Kapitel werden mathematische Vorstellungsübungen in verschiedener Hinsicht analysiert. So wird die Unterrichtsumgebung im ersten Abschnitt hinsichtlich des durch sie implizierten Konzepts von Lernen positioniert.

In Abschnitt 5.2 werden die vorgelegten Texte von Vorstellungsübungen analysiert. Auf der Grundlage des Vorstellungsbegriffs, wie er im letzten Kapitel erläutert wurde, sowie aufgrund meiner Erfahrungen mit dem Unterrichtsinstrument werden alle acht Texte auf Vorstellungsprozesse sowie auf mathematische Prozesse hin untersucht. Abschließend werden in Abschnitt 5.3 Effekte von Vorstellungsübungen auf Lernende beschrieben, die von einem regelmäßigen Einsatz des Unterrichtsinstruments erwartet werden, und zwar unter Einbezug ausgewählter Antworten aus der Schülerbefragung (Kap. 3).

Damit geht es in diesem Kapitel um folgende Forschungsfragen (S. 11 f.):

(F3a) Welche Vorstellungen intendiert der Text jeder einzelnen Vorstellungsübung, welche Vorstellungen ermöglicht er? Zu welchen mathematischen Prozessen kann er im Mathematikunterricht führen?

(F3b) Welche Effekte in Bezug auf den Umgang mit Mathematik können von einem regelmäßigen Einsatz des Unterrichtsinstruments erwartet werden?

Mit anderen Worten zeigt dieses Kapitel das inhärente *didaktische Potenzial* von mathematischen Vorstellungsübungen auf.

5.1 Positionierung der Unterrichtsumgebung

Jegliche Art der Aufbereitung und des Unterrichtens fachlicher Inhalte impliziert auch eine Positionierung in der Frage, wie fachliche Kenntnisse und Fähigkeiten erworben werden. Dies gilt auch für Vorstellungsübungen.

Aus den Ausführungen im Kapitel 2 geht hervor, dass Lehrpersonen und Schülerinnen und Schüler in den beiden Phasen von Vorstellungsübungen unterschiedlich aktiv sind. Nachfolgend wird erläutert, inwiefern in Vorstellungsübungen die Prinzipien von Instruktion durch die Lehrperson und von Konstruktion seitens der Lernenden miteinander *verbunden* sind.

Verbindung von Instruktion und Konstruktion

In der Frage der Epistemologie lassen sich nach Gabi Reimann-Rothmeier und Heinz Mandl zwei puristische Positionen ausmachen, eine kognitivistisch und eine konstruktivistisch gefärbte [Reimann-Rothmeier & Mandl 2001]:[1]

- Unterricht von einer *kognitivistischen* Position ausgehend versteht Lehren im Sinne von Instruieren (Anleiten, Darbieten und Beibringen), während sich Lernen als vorwiegend rezeptive Angelegenheit darstellt (Empfangen und Nachahmen). Die Lehrperson konzentriert sich auf eine genaue Vorausplanung und Optimierung ihrer *Instruktion*, wodurch ihr eine aktiv-gestaltende Rolle zukommt. Lernenden wird eine passive Rolle zugewiesen, weil sie gehalten sind, die von der Lehrperson transportierten Wissensinhalte durch ihre Sinne zu rezipieren.[2]
  Diese Position basiert auf der erkenntnistheoretischen Annahme des *Empirismus*, nach der der menschliche Geist einer „tabula rasa" gleicht, der beim Lernen aus Sinneswahrnehmungen und -erfahrungen gewonnene Eindrücke eingraviert werden.

- In einem Unterricht, der von einer *konstruktivistischen* Position ausgeht, wird Lernenden eine aktive und eigeninitiative Rolle zugedacht. Vor dem Hintergrund ihrer je eigenen Erfahrungswelt und ihres Vorwissens machen die Lernenden wesentliche fachliche Inhalte selbst aus und bringen sie in Zusammenhang mit ihrer eigenen Realität – *Bedeutungskonstruktion* statt *Informationsverarbeitung* findet hier also statt.[3] Lehren wird entsprechend als Gestaltung von Lernumgebungen zur Anregung der Lernenden und als Beratung der Lernenden aufgefasst, womit sie mitsamt ihren inneren Prozessen stärker in den Vordergrund rücken.[4]
  Diese Position erfreut sich in den letzten Jahren großen Interesses, wenn-

[1] Für eine ausführliche Diskussion unterschiedlicher Lerntheorien und Unterrichtsprinzipien mit ihren Problemen siehe [Weinert 1996].

[2] Deshalb spricht Wittmann von einer „passivistischen" und Jahnke-Klein von einer „rezeptiven" Position ([Wittmann 1994, S. 157] und [Jahnke-Klein 2001, S. 69 f.]). Der heute verwendete Begriff „kognitiv" weist – in Anlehnung an die Kognitionspsychologie, die von der „Repräsentation" von Wissen spricht – auf das *Abbilden* von Realität hin.

[3] Wie die Kognitionspsychologie mit Informationsverarbeitung zusammenhängt, wird in der entsprechenden Fußnote auf S. 108 beschrieben.

[4] Altrichter und Posch vergleichen kognitivistisches Lernen mit der Aufnahme von Bildern auf einem Filmstreifen (dem Gehirn entsprechend), während sie konstruktivistisches Lernen mit der *Photosynthese* in Verbindung bringen, bei der fremde anorganische Stoffe von der Pflanze selbst (den Lernenden) mit Hilfe des Chlorophylls und des Lichtes in organische Stoffe (erlerntes Wissen) synthetisiert würden. [Altrichter & Posch 1998, S. 180 f.]

> gleich sie nicht neu ist.[5] In ihrer heutigen Ausprägung basiert sie auf der epistemologischen Annahme des *radikalen Konstruktivismus*, dass nämlich Wissen vom Subjekt nicht passiv-rezeptiv aufgenommen, sondern vielmehr aktiv-konstruktiv aufgebaut wird: Jedes erkennende Subjekt erschafft sich in Wahrnehmungen und Handlungen aktiv sein eigenes Wissen und damit seine eigene Realität.[6] [von Glasersfeld 1998, S. 49]

Beide Positionen kämpfen mit diversen *unterrichtspraktischen Problemen*. Die kognitivistische Auffassung muss sich die Kritik gefallen lassen, sie traue den Schülerinnen und Schülern keine Verantwortung für das eigene Lernen zu und demotiviere deshalb. Zudem würden Schülerinnen und Schüler durch die zergliedernde Aufbereitung von Unterrichtsinhalten „träges Wissen“ erwerben, welches nur unzureichend flexibel angewendet werden könne und leicht flüchtig sei.[7] Der konstruktivistischen Auffassung hingegen wird vor allem von Lehrerseite entgegengehalten, dass ihre unterrichtspraktische Umsetzung zu zeit- oder materialaufwändig sei, und zwar sowohl für die Unterrichtenden als auch für die Schülerinnen und Schüler. Zudem könne die erwartete Selbstverantwortung dazu führen, dass Leistungsstarke sehr viel stärker von einem solchen Unterricht profitierten als Leistungsschwache, die sich überfordert fühlten. [Reimann-Rothmeier & Mandl 2001, S. 612 f., S. 624]

Die Nachteile dieser beiden puristischer Auffassungen lassen eine pragmatische Auffassung *zwischen* Instruktion und Konstruktion wünschenswert erscheinen, oder mit den Worten von Reimann-Rothmeier und Mandl:[8]

---

[5] So sind das auf Bruner zurückgehende *entdeckende Lernen* [Winter 1991, S. 1–5] sowie das *genetische Lernen* [Wagenschein 1973] Vorläufer eines Mathematik- bzw. Physikunterrichts, der auf einer konstruktivistischen Position fußt. In diese Reihe gehören auch Wittmanns *operatives Prinzip* und das *Prinzip aktiven Lernens*, weil ihnen Piagets bzw. Galperins Sicht von Lernen zugrunde liegt (siehe das Fazit auf S. 104 f.).

[6] Der radikale Konstruktivismus und seine Bedeutung für die Mathematikdidaktik wurde in den letzten Jahren so ausführlich diskutiert, dass in dieser Arbeit darauf verzichtet wird. Die aus dieser radikalen Position resultierende Frage, wie Verständigung unter verschiedenen Subjekten möglich sei, beantwortet ein um eine soziale Komponente modifizierter, *sozialer* Konstruktivismus durch zwei zusätzlichen Annahmen: „Subjektive Theorien müssen innerhalb der sozialen Realität viabel sein“ und „Subjektive Theorien werden durch die gemeinsame Aushandlung zu kollektiven und anerkannten Theorien“ [Hußmann 2002, S. 6].

[7] Für Kritik an einem instruktionistischen Mathematikunterricht siehe [Wittmann 1994, S. 159–162] und [Jahnke-Klein 2001, S. 72–78].

[8] Die Forderung, kognitivistische mit konstruktivistischen Unterrichtsmerkmalen zu verbinden, unterstreichen Weinert und Reusser, wenn sie in ihr ein Fazit der aktuellen pädagogisch-psychologischen Forschung sehen ([Weinert 1997, S. 25] und [Reusser 2001, S. 127–130]). Diese Forschung wird mittlerweile – nach der jahrelangen einseitigen Propagierung konstruktivistischen Unterrichtens – auch in der Mathematikdidaktik geäußert, siehe [Hefendehl-Hebeker 2004 b].

> „Konstruktion und Instruktion lassen sich nicht nach einem Alles-oder-nichts-Prinzip realisieren. Lernen erfordert zum einen immer Motivation, Interesse und Eigenaktivität seitens des Lernenden und der Unterricht hat die Aufgabe, diese Konstruktionen anzuregen und zu ermöglichen. Lernen erfordert zum anderen aber auch Orientierung, Anleitung und Hilfe. Ziel muss es folglich sein, eine Balance zwischen expliziter Instruktion durch den Lehrenden und konstruktiver Aktivität des Lernenden zu finden.“ [Ebd., S. 627]

Mathematische Vorstellungsübungen lassen sich einer *gemäßigt konstruktivistischen* Auffassung von Unterricht zuordnen. Lernen ist in hier als aktiver und konstruktiver Prozess des Individuums konzeptualisiert, weil es darum geht, dass Schülerinnen und Schüler in der Phase der Vorstellungen ihre eigenen Vorstellungen aufbauen und damit operieren und so mathematische Inhalte mit ihrer eigenen Realität in Verbindung bringen. Durch ihre Vorstellungen verleihen Lernende mathematischen Inhalten Bedeutung. Lehren heißt in dieser Phase, mathematische Inhalte in klar aufeinander folgende, nicht allzu große Schritte aufzubereiten und in präzisen Vorstellungsanweisungen darzubieten. *Während die Lehrperson Vorstellungen beschreibt, konstruieren die Schülerinnen und Schüler Vorstellungen und damit Bedeutung.*[9]

In der Phase der Besprechung thematisieren die Lernenden ihre Vorstellungen und Vorstellungsweisen, im Austausch mit ihren Mitschülerinnen und -schülern erproben sie deren Tragfähigkeit und bearbeiten sie weiter. Die Lehrperson nimmt in dieser Phase eine eher beobachtende Rolle ein. Da sie nicht schon von vornherein wissen kann, welche Antworten und Beobachtungen von den Schülerinnen und Schülern formuliert werden, erhält sie einen aufschlussreichen Einblick in deren Denk- und Herangehensweisen. Sie berät und unterstützt die Schülerinnen und Schüler bei der Analyse ihrer Vorstellungen und Vorstellungsprozesse, sie ergänzt und beantwortet fachliche Fragen. Damit ist ihr Fokus stärker entwicklungs- als defizitorientiert.

Insgesamt gesehen rücken die Lernenden durch den Einbezug ihrer Vorstellungen bedeutend stärker in den Fokus als in einem Mathematikunterricht, der vorwiegend kognitivistische Merkmale trägt. *Insofern verbinden mathematische Vorstellungsübungen das Prinzip der Instruktion mit dem der Konstruktion und folgen damit modernen didaktischen Leitideen.*

Damit nimmt das Unterrichtsinstrument auch hinsichtlich der keineswegs nur akademischen Streitfrage, ob mathematische Inhalte per se existieren oder

[9] Zu Vorstellungen und der Konstruktion von Bedeutung siehe Abschnitt 4.2.1 und 4.2.4.

ob sie von Menschen gedacht, ausgehandelt und damit geschaffen sind, eine pragmatische Position ein.[10] In Anlehnung an Roland Fischer lässt sich diese Position folgendermaßen formulieren: *Mathematische Vorstellungen haben mit objektiven Tatsachen zu tun, aber auch mit uns selbst.*[11]

5.2 Analyse der Texte von Vorstellungsübungen

Die Texte der Vorstellungsübungen in Abschnitt 2.2 stellen einen zentralen Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit dar. Welche mathematischen Aktivitäten, welche regulären und singulären Vorstellungen ermöglichen Vorstellungsübungen? Um Fragen wie diese zu beantworten, werden zuerst auf Grundlage der theoretischen Begriffsbestimmung verfeinerte Analysekategorien erarbeitet, die anschließend auf alle acht Texte angewandt werden und so die Einsatzmöglichkeiten von Vorstellungsübungen aufzeigen.

5.2.1 Gesichtspunkte zur Analyse

Vorstellungsübungen verstehen sich als ein Beitrag, Vorstellungen im Mathematikunterricht als wenig beachtete Elemente des mathematischen Aktivseins bei Lernenden anzusprechen und nutzbar zu machen. Damit liegt der Schwerpunkt von mathematischen Vorstellungsübungen auf *Vorstellungsprozessen*. Dies schlägt sich auch in der folgenden Analyse nieder. Mit Vorstellungsübungen wird jedoch keineswegs nur das Ziel verfolgt, Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen zu aktivieren und explizit zu machen. Vielmehr sollen auf dieser Grundlage mathematische Aktivitäten angeregt werden. Deshalb wird zur Erfassung des großen mathematikdidaktischen Potenzials von Vorstellungsübungen auch analysiert, was Vorstellungsübungen im Bereich *mathematischer Prozesse* wie Argumentieren oder Modellieren vermögen. Im folgenden Abschnitt 5.2.1.1 wird also genauer beschrieben, was unter mathematischen und heuristischen Prozessen verstanden wird, um daraus zwei erste

[10] Der erste Standpunkt, der eher unter Fachmathematikerinnen und -mathematikern verbreitet ist, mündet leicht in eine kognitivistische Unterrichtsposition, in der die Lernenden ‚ewige', unabhängig vom Menschen existierende Wahrheiten nachzuvollziehen und sich ihnen anzupassen haben [Hußmann 2004, S. 9 f.]. Der zweite, konstruktivistische Standpunkt wird naturgemäß eher von Pädagogen und Soziologinnen vertreten. Von ihnen stammen stärker auf Aushandlungsprozesse ausgerichtete Unterrichtsvorschläge.

[11] „*Beschreibt* die Wissenschaft die Realität oder *konstruiert* sie diese? [...] Es scheint vernünftig anzunehmen, dass an beidem etwas daran ist: Wissenschaft hat mit ‚objektiven Tatsachen' zu tun, aber auch mit uns selbst." [Fischer 2003, S. 46, Hervorhebung im Original]

Gesichtspunkte zu gewinnen, unter denen die Vorstellungsübungen analysiert werden sollen.

Vorstellungsübungen weisen Schülerinnen und Schüler dazu an, sich einen mathematischen Inhalt zu vergegenwärtigen sowie die eigenen Vorstellungen gedanklich zu erkunden, zu verändern und mit ihnen zu experimentieren. Derartige *Vorstellungsprozesse* werden im ersten Abschnitt unter heuristischen Prozessen subsumiert und damit mathematischen Prozessen vorangestellt. Im Abschnitt 5.2.1.2 werden unter Bezugnahme auf die Begriffsbestimmung von Vorstellung in Kapitel 4 zwei weitere Gesichtspunkte für die Analyse entwickelt (für einen Überblick über alle vier Gesichtspunkte zur Analyse der Vorstellungsübungen siehe Abschnitt 5.2.1.3 auf S. 150 f.).

5.2.1.1 Analyse der beteiligten mathematischen Prozesse – Gesichtspunkte 1 und 4

Zur mathematischen Kompetenz gehört nach aktuellen Begriffsbestimmungen nicht nur die Kenntnis mathematischer Inhalte, sondern auch die Handlungsfähigkeit auf der Basis dieser Kenntnisse – mathematisch kompetent zu sein heißt, in verschiedenen Situationen *mathematisch handeln* zu können.

Darunter werden jedoch fertig ausgebildete Handlungen verstanden und nicht etwa Versuchshandlungen. So sind in den aktuellen deutschen *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* Versuchshandlungen wie gedankliches Verfügbarmachen, Vergegenwärtigen und Erkunden ausgespart:

> „Mit dem Erwerb des Mittleren Schulabschlusses sollen Schülerinnen und Schüler über die nachfolgend genannten allgemeinen mathematischen Kompetenzen verfügen, die für alle Ebenen des mathematischen Arbeitens relevant sind. [...] *Probleme mathematisch lösen*, *mathematisch modellieren*, *mathematische Darstellungen verwenden*, *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen*, *kommunizieren*, *mathematisch argumentieren*." [KMK 2004, S. 7, Umsetzung der Graphik in Fließtext C. W.][12]

Auch Kompetenzen wie Experimentieren, Vermuten und plausibles Schließen werden in den Bildungsstandards nur am Rande erwähnt, obschon sie notwen-

[12] Über die „allgemeinen" mathematischen Kompetenzen hinaus nennen die Bildungsstandards auch inhaltsbezogene Kompetenzen, die den „mathematischen Leitideen Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall" zugeordnet sind [KMK 2004, S. 9–12].

dige Voraussetzungen für mathematische Aktivitäten sind.[13] Dafür sind zwei Gründe denkbar: Zum einen sind Ergebnisse gedanklichen Vergegenwärtigens, aber auch Experimentierens sowie plausiblen Schließens ‚unfertig', das heißt singulär und oft vage. Da (schriftliche) Darstellungen traditionellerweise dazu dienen, ‚fertige' Wissensbestände zu sichern, wird Singuläres in seiner Vorläufigkeit nur selten publik gemacht – und damit von der Wissenschaft auch nur selten thematisiert.

Zum anderen scheint die KMK davon auszugehen, dass Prozesse des Vergegenwärtigens und Experimentierens der Darstellung und Begründung mathematischer Lösungen zwangsläufig vorangehen und deshalb bei der Nennung von Prozessen wie „mathematisch argumentieren" oder „Probleme mathematisch lösen" ‚mitgemeint' sind. Damit würde ihnen bestenfalls der Status von *prämathematischen Prozessen* zugestanden. Eine dergestalt ‚mitgemeinte' Nennung ist zwar aus einer Sicht, die primär auf die Messung und den Vergleich des Outputs von Bildungssystemen ausgerichtet ist, berechtigt, lässt sich doch nur Dargestelltes und von außen Beobachtbares miteinander vergleichen. Aus pädagogischer und didaktischer Sicht jedoch ist es problematisch, wenn eine ausschließlich produktorientierte Ausrichtung für die Unterrichtsgestaltung herangezogen wird. Unterricht besteht nun einmal nicht nur aus der Prüfung von Output, sondern mindestens ebenso sehr aus der Anregung von Lernprozessen. Unterricht regt die Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten an, weshalb heuristische Aktivitäten wie Vergegenwärtigen und Experimentieren mindestens so wichtig sind wie die von der KMK genannten mathematischen Aktivitäten.[14]

Trotz der fehlenden wissenschaftlichen Tradition, ‚unfertige' und singuläre Ergebnisse in ihrer Vorläufigkeit zu verschriftlichen oder zu publizieren, gab es immer wieder einzelne Mathematiker, die sich für solche Aspekte mathematischen Denkens interessierten. So untersuchte Jacques Hadamard die Arbeits- und Denkweise berühmter Wissenschaftler, um die Grundlage ihrer Kreati-

[13] So wird *heuristisches Denken* als eine Ausdifferenzierung der Problemlösekompetenz erwähnt, und *Vermuten* und *plausibles Schließen* werden unter der mathematischen Argumentationskompetenz angesprochen. [KMK 2004, S. 8]

[14] Die „Deutsche Mathematikervereinigung" und die „Gesellschaft der Didaktik der Mathematik" kritisieren in ihrer gemeinsamen Stellungnahme denn auch, dass die Liste der allgemeinen mathematischen Kompetenzen „den kreativen und experimentellen Aspekt vermissen lässt" [Reiss & Gritzmann 2003, S. 2]. Entsprechend vergrößern neuere, für Mathematiklehrkräfte verfasste Werke – trotz ihrer Bezugnahme auf die Bildungsstandards – ihren Blickwinkel und gehen ausführlich auf heuristische Strategien ein (siehe etwa [Büchter & Leuders 2005, S. 17 ff., S. 36 ff., S. 115 ff.]).

vität zu verstehen [Hadamard 1949].[15] Konzentrierte sich Hadamard noch auf Forscher wie Einstein oder Poincaré, hat Georg Pólya allgemeine Strategien zum erfolgreichen Lösen mathematischer Probleme auf dem Niveau der Sekundarstufe beschrieben. In seiner *Schule des Denkens* spricht er erstmals von „heuristischem Denken" [Pólya 1949, S. 119 f.]. Noch dezidierter verzichtet er in seinen beiden späteren mathematikdidaktischen Werken auf die Darstellung formaler, ‚fertiger' Mathematik und gewährt stattdessen Einblick in kreative Lösungsprozesse, die zum Entstehen von Mathematik führen. So schickt er seinem Werk *Vom Lösen mathematischer Aufgaben* folgende Warnung voraus:

> „Diese Darstellung mag einem Mathematiker, der sich nicht für Methodisches interessiert, zu weitläufig erscheinen. Aber was hier dargestellt wird, sind tatsächlich nicht einfach Lösungen, sondern die Entstehungsgeschichten von Lösungen." [Pólya 1967, S. 11]

Anhand solcher Entstehungsgeschichten arbeitet Pólya heraus, an welcher Stelle von Lösungsprozessen welche heuristischen Strategien eingesetzt werden.[16] Sein Interesse ist also darauf gerichtet, den *kreativen Akt* der Entwicklung von Lösungen zu verstehen [Pólya 1966, S. 19 ff.], er will Methoden angeben, die zu Lösungen führen [ebd., S. 171 ff.].[17]

Auch einigen der bereits referierten mathematikdidaktischen Arbeiten liegt dieses Interesse zugrunde. So beanspruchen die Verfechter des operativen Prinzips (Abschnitt 4.1.1) bzw. des Prinzips beweglichen Denkens (Abschnitt 4.1.2) ja gerade, dem Wesen der Kreativität näher zu sein und mit ihrem didaktischen Prinzip kreative Prozesse beim Lernen von Mathematik eher zu ermöglichen als dies in einem Unterricht – vom intendierten Resultat her denkend – gelingen könnte, der auf einen sachlogisch-systematischen Aufbau mathematischer Inhalte rekurriert.

Mit anderen Worten: Die Liste „allgemeiner mathematischer Kompetenzen" der KMK ist nicht umfassend genug, um die von mathematischen Vorstellungsübungen intendierten Aktivitäten wie das Vergegenwärtigen oder Experimentieren zu erfassen. Aber auch Pólyas Verständnis heuristischen

[15] Siehe auch die entsprechende Fußnote auf S. 117.

[16] Beispielhaft dafür ist Pólyas „Zeitlupenaufnahme" [Pólya 1967, S. 25], eine geometrisch dargestellte Entstehungsgeschichte einer Lösung.

[17] Als weitere Mathematiker und Mathematikdidaktiker, die auf die Bedeutung heuristischer Strategien hinweisen und bedauern, dass diese aus dem Mathematikunterricht ausgeklammert werden, können [van der Waerden 1973], [Fischer & Malle 1985, S. 205–220] und [Leuders 2001, S. 211–213] genannt werden.

Denkens hilft nicht weiter, da es sich in erster Linie auf die Lösungsmethoden mathematischer Probleme richtet.

Eine für unseren Zweck geeignete Aufstellung findet sich in Ludwig Bauers Dissertation *Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben* [Bauer 1978]. Bauer listet mathematische Prozesse auf, die nicht nur aus den Bereichen des logischen Denkens, des Mathematisierens und des Repräsentierens, sondern *gleichberechtigt* auch aus dem Bereich des heuristischen Denkens stammen.[18] Da heuristisches Denken auf die Genese von Vermutungen zielt und erschließen will, subsumiert Bauer darunter insbesondere *Experimentieren* sowie *plausibles Schließen*:[19]

- *Experimentieren* lehnt Bauer an naturwissenschaftliche „Beobachtungen unter kontrollierten Bedingungen“ an. Unter anderem erwähnt er „absichtliches Herbeiführen verschiedener mathematischer Situationen, die einen Beitrag zur Fragestellung leisten könnten“, „methodisches Abändern der einzelnen Bedingungen, welche die Ausgangssituationen charakterisieren“, „prüfen, wie sich die Variation der Bedingungen auswirkt“[20], und das „Bilden von Hypothesen“. Ergebnisse, die durch Experimentieren gewonnen werden, sind nach Bauer allerdings unsicher und bedürfen deshalb mathematischer Beweise. Im Zusammenhang mit Vorstellungsübungen heißt Experimentieren, die angewiesenen Vorstellungen zu *erkunden* sowie andere, nicht genannte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen *auszuprobieren* und zu *aktivieren* mit dem Ziel, zu Vermutungen und Fragen zu gelangen. [Ebd., S. 112 f.]

- Ein weiterer heuristischer Prozess ist das *plausible Schließen*. Mit Bezug auf Pólya versteht Bauer darunter „das dem logischen Schließen vorangehende Suchen bzw. Finden von Prämissen und Konklusionen“. Er spricht bei entsprechend gefundenen Sätzen „nicht von ‚Wahrheit‘, sondern von einem bestimmten Maß an ‚Glaubwürdigkeit‘“. In Vorstellungsübungen vom Typ Begründung bzw. Paradoxon werden besonders

[18] Allerdings ordnet er in seiner Habilitationsschrift Prozesse wie Systematisieren, Ordnen und Beweisen „mathematischen Denkprozessen im engen Sinn“ zu, während nun heuristische Prozesse, Experimentieren und plausibles Schließen der umfassenderen Menge mathematischer Denkprozesse im „weiten Sinn“ zugeordnet werden. [Bauer 1988, S. 45–53]

[19] Auf den von Bauer ebenfalls genannten heuristischen Prozess des *Umstrukturierens* wird im Zusammenhang mit Vorstellungsprozessen eingegangen (siehe S. 146).

[20] Vergleiche mit der Frage „Was geschieht mit ..., wenn ...?“, der Grundfrage des operativen Prinzips (siehe S. 84 ff.).

> das „Schließen nach Analogie“ und das „anschauliche Schließen“ eingesetzt. Plausibles Schließen nach Bauer dient dazu, die Plausibilität eines Sachverhalts zu ermöglichen oder in Frage zu stellen. [Ebd., S. 115 ff.]

Da mit Vorstellungsübungen gerade heuristische Aktivitäten des Vergegenwärtigens, Experimentierens und plausiblen Schließens angeregt werden sollen, verstehe ich in dieser Arbeit unter *mathematischen Prozessen nicht nur mathematisches Modellieren und Argumentieren, sondern auch heuristische Prozesse* wie die eben genannten. Mit anderen Worten wird der Begriff des „mathematischen Prozesses“ in dieser Arbeit wie schon bei Bauer in einem umfassenderen, didaktischeren Sinne verwendet als etwa in den auf Output ausgerichteten Bildungsstandards der KMK.

Damit kann im Folgenden für alle vorliegenden Vorstellungsübungen beschrieben werden, wie die beteiligten *mathematischen Prozesse* in den unterschiedlichen Phasen aussehen:

- Durch den Text der Vorstellungsübung *intendierte heuristische Prozesse* (Gesichtspunkt 1, siehe Tab. 5.1, S. 151): Auf den ersten Blick geht es in der Phase der Vorstellungen, während der die Vorstellungsanweisungen vorgetragen werden, um die erschließende Befassung mit einem mathematischen Inhalt, also um das *Vergegenwärtigen*, *Verfügbarmachen* und *Erkunden* sowie um das *Experimentieren* und *plausible Schließen* seitens der Schülerinnen und Schüler. Welcher dieser Prozesse dabei wie ins Spiel kommt, hängt eher vom Typ einer Vorstellungsübung als von ihrer jeweiligen Ausgestaltung ab. Deshalb werden die intendierten Prozesse in den Analysen der Vorstellungsübungen *vor* der Analyse der einzelnen Beispielübungen beschrieben.[21]

- *Mögliche mathematische Prozesse* (Gesichtspunkt 4, siehe Tab. 5.1, S. 151): In den Texten aller Vorstellungsübungen sind unterschiedliche Möglichkeiten mathematischer Prozesse angelegt, die auf dem Hintergrund der Phase der Vorstellungen in der darauf folgenden Phase realisiert werden können. So sind je nach Vorstellungsübung Aktivitäten wie *mathematisches Darstellen*, *Argumentieren*, *Verallgemeinern* usw. in unterschiedlicher Gewichtung möglich. Zusätzlich lassen sich bei einigen Vorstellungsübungen Bezüge zu außermathematischen Themen (Geschichte, Kunst, Chemie, Technik) herstellen. Nach diesem Gesichtspunkt wird deshalb jede Vorstellungsübung einzeln analysiert.

[21] Siehe S. 152, S. 165, S. 177 und S. 188.

Während es in den beiden genannten Gesichtspunkten um mathematische Prozesse im weiteren Sinne geht, nehmen zwei weitere Gesichtspunkte die spezifischen Vorstellungsprozesse unter die Lupe.

5.2.1.2 Analyse der beteiligten Vorstellungsprozesse – Gesichtspunkte 2 und 3

Die *Vorstellungsprozesse*, die mit dem Text einer Vorstellungsübung zusammenhängen, stehen – ähnlich wie die Entstehungsgeschichten von Lösungen bei Pólya – im Vordergrund der Analysen. In Entsprechung zur gemäßigt-konstruktivistischen Positionierung der Unterrichtsumgebung ist zwischen Vorstellungen, die durch die Vorstellungsanweisungen *intendiert* sind, und solchen, welche von den Vorstellenden singulär *konstruiert* werden, zu unterscheiden (siehe Abschnitt 5.1). Jede Vorstellungsübung wird auf diese beiden Gesichtspunkte befragt (Gesichtspunkt 2 und 3, siehe Tab. 5.1, S. 151).

Durch den Text der Vorstellungsübung intendierte Vorstellungen

Vorstellungsübungen weisen Lernende sprachlich dazu an, Vorstellungen gedanklich aufzubauen, zu beobachten und an ihnen zu handeln – sie *instruieren* die Konstruktion von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen. Dieses dualistische, in Kapitel 4 nicht weiter differenzierte Begriffsverständnis von Vorstellung wird nun im Hinblick auf die Analyse der Vorstellungsübungen weiter präzisiert.

Vorstellungen in Form von gedanklichen Objekten können nach verschiedenen Kriterien eingeteilt werden. Während Vorstellungen in der Kognitionspsychologie nach der Art der beteiligten Zeichensysteme (bildhafte Vorstellungen, verbale Vorstellungen) unterschieden werden, werden sie in dieser Arbeit nach der Art der *Sinnesmodalitäten* unterschieden, mit denen sie – ob kausal oder nur qualitativ – verknüpft zu sein scheinen (siehe Abb. 5.1):

- Mit der aktuellen Forschung kann davon ausgegangen werden, dass bildhafte bzw. visuelle Vorstellungen in ihrer Verwandtschaft zu visuellen Wahrnehmungen einer konstruktiven und damit kognitiven Leistung bedürfen.[22] Aus diesem Grund richtet sich auch die folgende Analyse

[22] So geht die Kognitionspsychologie davon aus, dass Vorstellungsbilder von demselben System der Informationsverarbeitung abhängig sind, das auch der visuellen Wahrnehmung unterliegt. Sie stützt sich dabei auf hirnphysiologische Befunde. ([Anderson 1996, S. 117], [Parkin 1996, S. 110, S. 119 f.] und [Richardson 1999, S. 49 ff., S. 61–67]).

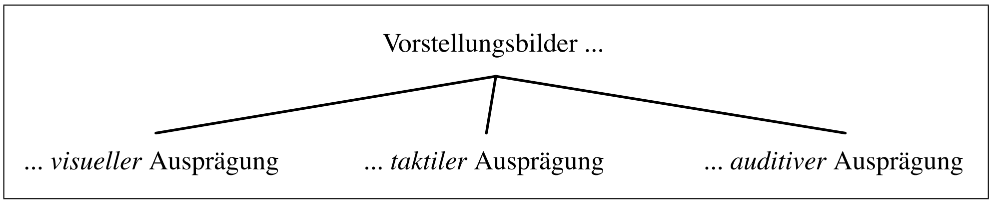

Abb. 5.1: Formen von Vorstellungsbildern

der Vorstellungsübungen fast ausschließlich auf bildhafte, mit visuellen Wahrnehmungen verwandte Vorstellungen, auf *Vorstellungsbilder*.

- Vorstellungen anderer Sinnesmodalitäten werden im Zusammenhang mit kognitiven Prozessen eher Begleitcharakter zugesprochen.[23] Da es aber unbestritten ist, dass Begriffe – wie etwa der einer Metallfeder – nicht nur von visuellen, sondern auch von taktilen Vorstellungen begleitet sein können – so zum Beispiel von der Vorstellung des Drucks, den die Feder auf zwei sie einspannende Finger ausübt –, werden in einigen Analysen unter dem Begriff *taktile Vorstellungen* entsprechende Empfindungen erwähnt. Analoges gilt für *auditive Vorstellungen*.

Vorstellungsübungen regen nicht nur zu Vorstellungsbildern, sondern auch zu *Vorstellungshandlungen* an. Wie bereits in der denkpsychologischen Begriffsbestimmung von Vorstellung erwähnt, lassen sich zwei Formen von Vorstellungshandeln ausmachen, gedankliches Bearbeiten und gedankliches Bewegen (siehe Abb. 5.2):

- Vorstellungshandeln in Form von *gedanklicher Bearbeitung* steht für verinnerlichtes Handeln wie das Zerlegen eines gegebenen oder das Zusammensetzen bzw. Konstruieren eines neuen gedanklichen Sachverhalts aus einzelnen Elementen oder das Vergleichen. Gedankliches Bearbeiten fokussiert auf *einzelne, diskret aufeinander folgende Zustände* – wie

[23] Dass dies umgekehrt mit der fast ausschließlichen Erforschung von Vorstellungen visueller Ausprägung zu tun hat, kann an dieser Stelle nur vermutet werden. Jedenfalls wurden vor der intensiven wissenschaftlichen Auseinandersetzung selbst visuelle Vorstellungen als passives Abbild und damit eher im Sinne eines Schnappschusses, einer Photographie aufgefasst als im heutigen konstruktivistischen Sinne eines aktiven Nachzeichnens. Es ist also zu vermuten, dass in Zukunft auch taktile oder auditive Vorstellungen als aktiv-konstruktive Denkelemente angesehen werden. Entsprechend weisen neueste Arbeiten wie die von [Douville & Pugalee 2003] darauf hin, dass die Aktivierung *multimodaler Vorstellungsbilder* für mathematische Problemlösungsprozesse lernwirksamer ist als die alleinige Aktivierung der visuellen Modalität.

Vorstellungshandeln ...

... als *gedankliches Bearbeiten:*	... als *gedankliches Bewegen:*
· z. B. Zusammensetzen, Zerlegen, Abschneiden, Aufschreiben, Halbieren, Färben	· z. B. Schieben, Drehen, Scheren, Abschreiten, Zoomen, Wechseln der Perspektive
· Fokus auf einzelne, aufeinander folgende Zustände	· Fokus auf den Ablauf von Zuständen
· oft: Einbezug der Hände	· oft: Einbezug des Körpers
· kleinräumig	· großräumig
· Kontrolle durch den Gesichts- und den Tastsinn	· Kontrolle durch den Gesichts- und den Muskelsinn

Abb. 5.2: Formen von Vorstellungshandlungen

etwa auf den Anfangs- und Endzustand sowie auf die Zwischenzustände – eines gedanklichen Sachverhalts. Es kann sich auch auf Eigenschaften oder Beziehungen unter den Teilen richten. Werden Körperteile des Vorstellenden in die gedankliche Bearbeitung einbezogen, dann handelt es sich in der Regel um seine *Hände*. Damit findet gedankliches Bearbeiten eher *kleinräumig* statt, das heißt in einem eingeschränkten Umfeld vor dem Vorstellenden, beispielsweise auf dem vorgestellten Schreibtisch oder auf einer Wandtafel. Wie konkretes Bearbeiten mit konkreten Wahrnehmungen einhergeht, so wird auch gedankliches Bearbeiten von Vorstellungen begleitet, die visueller und – besonders im Falle des Einbezugs der Hände – zusätzlich taktiler Ausprägung sind.

- Vorstellungshandeln in Form von *gedanklicher Bewegung* entspricht beweglichem Denken im Sinne der Meraner Reform (Abschnitt 4.1.2). Es kann für gedankliches *Schieben*, *Drehen* oder *Verzerren* eines gedanklichen Gegenstands stehen und zeichnet sich durch *kontinuierliches Variieren* aus, was *beliebige Zwischenzustände* ermöglicht. Die Bewegung muss sich nicht auf einen gedachten Gegenstand beschränken – der Vor-

> stellende schaut dann gewissermaßen zu und führt Regie –, sie kann auch den Vorstellenden selbst mit seinem *ganzen Körper* einbeziehen (etwa wenn er ein Dreieck abschreitet).[24] Vorstellungshandeln als gedankliches Bewegen kann sich also nicht nur vor dem Vorstellenden abspielen, sondern *großräumiger* angelegt sein und den Vorstellenden selbst mit einbeziehen. Es wird nicht nur visuell, sondern auch mit dem Muskelsinn erfasst und durch ihn kontrolliert.[25]

Beide Formen von Vorstellungshandlungen stammen nicht nur aus der Mathematik (Zusammensetzen oder Drehen von Figuren, Halbieren von Zahlen), sie sind ebenso oft dem Alltag entnommen (Abschneiden, Färben, Abschreiten, Wechseln der Perspektive).

Zur Analyse der intendierten Vorstellungen werden die vorliegenden Texte herangezogen. Um zu bestimmen, mit welcher Vorstellungsanweisung welche Vorstellungsbilder und welche Vorstellungshandlungen beabsichtigt sind, werden die Sätze zerstückelt und der in einzelnen Satzteilen jeweils intendierte Vorstellungsaspekt in einer zweispaltigen Tabelle dargestellt (siehe Gesichtspunkt 2 in Tab. 5.1).

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Während die intendierten Vorstellungen durch Lesen des Texts von der Lehrperson an die Schülerinnen und Schüler herangetragen werden, interessieren hier besonders die singulären Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler während der Phase der Vorstellungen ohne sprachliche Anleitung von außen entwickeln und konstruieren. Sie erschöpfen sich keineswegs in den intendierten Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen, immer wieder gehen sie darüber hinaus oder bleiben dahinter zurück.

---

[24] Andere Autoren sehen eine Veränderung der Relation zwischen dem Vorstellenden und dem vorgestellten Objekt *nicht* als Ausdruck einer gedanklichen Bewegung an. So stellt bei Maier die Veränderlichkeit der räumlichen Relationen eines gedanklichen Objekts einen „dynamischen Denkvorgang“ dar, während sich bei statischen Denkvorgängen die Relation der Person zum Objekt ohne weiteres verändern kann. [Maier 1999, S. 52]

[25] Traditionellerweise werden fünf Sinnesmodalitäten unterschieden: Sehen, Hören, Riechen, Schmecken und Tasten. Sie vermitteln dem Bewusstsein Informationen über Vorgänge außerhalb der eigenen Körpergrenze. Neben diesen ‚äußeren Sinnen‘ werden heute zusätzlich ‚innere‘ Sinne wie der *Muskelsinn* (sog. Propriozeption) ausgemacht. Dazu gehören der Stellungssinn (Wie stehen die Gliedmaßen zum Körper?) und der Spannungssinn (Wie ist die Spannung der Muskulatur und der Sehnen?). Zusammen mit dem Gleichgewichtssinn ermöglicht der Muskelsinn, die Positionen und Bewegungen aller Körperteile, ihr Verhältnis zueinander und ihre Ausrichtung im Raum präzise zu erfassen. [Häcker & Stapf 1998, S. 666, 794]

Der Ursprung nicht intendierter und dennoch konstruierter singulärer Vorstellungen liegt unter anderem im *Umstrukturieren*, eine weitere von Bauer erwähnte Form heuristischen Denkens:

> „Unter Umstrukturieren versteht man die Umwandlung einer durch eine Problemstellung vorgegebenen Struktur in eine neue andersartige Struktur, aus der sich die gesuchte Lösung der Aufgabe ergibt. [...] Ein wichtiger Schritt, der gewissermaßen die Voraussetzung für eine Umstrukturierung schafft, ist [...] das ‚Aufbrechen' der Ausgangsstruktur. Das Abbauen einer gegebenen Struktur erfordert vom Problemlösenden die innere Bereitschaft, fixierte Denkmuster aufzugeben, um ein und dieselbe Sache unter möglichst vielen verschiedenen Gesichtspunkten und Aspekten zu betrachten." [Bauer 1978, S. 114][26]

Im Kontext von Vorstellungsübungen heißt Umstrukturieren beispielsweise, ein Vorstellungsbild gedanklich unter einem anderen Blickwinkel (von oben vs. von vorne) oder aus einer anderen Distanz (lokal vs. global) zu betrachten. Auch wenn Vorstellungsbilder oder Vorstellungshandlungen durch andere, singuläre Vorstellungen ergänzt oder abgelöst werden, wird umstrukturiert.

Weiter können singuläre Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen mit *Emotionen* verknüpft sein, besonders wenn sie mit eigenen Erfahrungen zu tun haben. Diese emotionalen Begleitumstände bestimmen mit darüber, ob ein Vorstellungsprozess wie intendiert verläuft, oder anders: Während angenehme, positive Emotionen ein Klima schaffen, in dem Vorstellungsprozesse leicht gelingen, stehen Vorstellungen, die mit unangenehmen, negativen Emotionen verknüpft sind, einem erfolgreichen Verlauf von Vorstellungsprozessen eher entgegen und behindern ihn.

Im Folgenden werden die Texte der Vorstellungsübungen nicht auf alle möglichen konstruierten singulären Vorstellungen hin untersucht. So kommen etwa singuläre Vorstellungen ausschmückenden Charakters oder Vorstellungen, die durch missverständliche Vorstellungsanweisungen erzeugt worden waren, nicht in Betracht. In der Analyse geht es nicht nur um hinderliche Vorstellungen, sondern vor allem um Vorstellungen, die im Hinblick auf die Beantwortung der (zum Schluss einer Vorstellungsübung gestellten) mathematischen Frage produktiv sind (siehe Abb. 5.3):

- Singuläre Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen sind *produktiv*, wenn sie einen entscheidenden Aspekt einer Sache erfassen, das

[26] Bauer bezieht sich an dieser Stelle explizit auf die Gestaltpsychologie, die den Begriff des Umstrukturierens in die Denkpsychologie eingeführt hat.

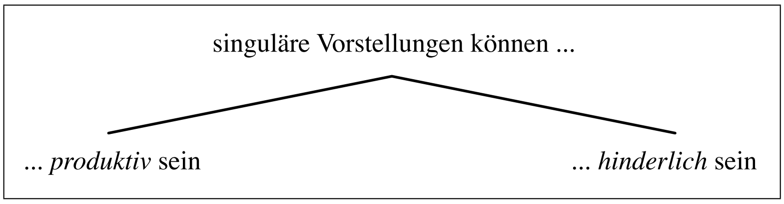

Abb. 5.3: Formen von singulären Vorstellungen

heißt wenn sie – mit Gallins und Rufs Worten – „Auswirkungen ins Reguläre“ haben und damit einer Kernidee nahe stehen (siehe S. 120). Sie können den Aufbau weiterer, nachfolgend angewiesener Vorstellungen vorwegnehmen oder bei der Organisation der Vorstellungen helfen (etwa durch Wechsel der Perspektive). Sie markieren Zwischenetappen in der Pólya'schen Entstehungsgeschichte von Lösungen. Auch singuläre Vorstellungen, die mit positiven Emotionen verknüpft sind, können zum Gelingen des Vorstellungsaufbaus beitragen (so etwa Sonnenschein oder angenehme Farben zur Ausgestaltung eines Vorstellungsbilds).[27]
In produktiven Vorstellungen drückt sich eine *kreative Eigenleistung* der Schülerinnen und Schüler aus. Obwohl sie im betreffenden Text einer Vorstellungsübung nicht angeleitet werden, hätten sie ohne weiteres durch ihn angeleitet werden können.

- *Hinderliche Vorstellungen* sind singuläre Vorstellungen, welche das Produktivwerden von Vorstellungsprozessen – ähnlich wie Denkbarrieren – behindern. Ihr Aufbau kann sehr unterschiedliche Ursachen haben. Zum einen können die beschriebenen außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhänge leicht von den intendierten Vorstellungen abführen. Auch allzu bild- oder erlebnishafte Vorstellungen erschweren unter Umständen die weitere gedankliche Bearbeitung bzw. die Beantwortung der mathematischen Frage.[28] Immer wieder erweisen sich singuläre Vorstellungen, die zunächst noch zu den intendierten Vorstellungen passen,

[27] Für ein entsprechendes Beispiel sei an Wittmanns Beispiel eines rotierenden Flächenstücks unter der Normalparabel (S. 88) erinnert. Dort ist die Vorstellung eines bestimmten Breitenkreises einer Kugel eine produktive Vorstellung: Durch die Rotation der rechten Berandung des Flächenstücks um die x-Achse entsteht ein Kreis. Wird dieser Kreis als auf einer Kugel sitzend interpretiert, bedeutet die nachfolgende Rotation um die y-Achse, dass dieser Breitenkreis auf der Kugeloberfläche entlang dem Äquator verschoben wird.
[28] Für eine entsprechende Schilderung siehe [Lurija 2003], der eindringlich über die Stärken und Schwächen eines zwanghaften Eidetikers berichtet, der seine Vorstellungsbilder ähnlich dominant wie visuelle Sinneseindrücke empfindet.

im Zuge der weiteren Vorstellungsanweisungen als unzureichend oder sogar ungeeignet und müssen umgebaut werden. Ganz besonders können hinderliche Vorstellungen auch beim (als produktiv erwähnten) Umstrukturieren entstehen. Durch die Fokussierung auf Ausschnitte eines Vorstellungsbildes oder auf Symmetrieaspekte tritt das ursprüngliche Vorstellungsbild in den Hintergrund. Wird es vom Ausschnitt ausgehend rekonstruiert, kann es geschehen, dass das so entstandene Vorstellungsbild ein anderes ist als das ursprüngliche. So kann beispielsweise ein Würfel zu einer Pyramide mutieren, wenn auf die in einer Würfelecke zusammenlaufenden drei Kanten fokussiert wird (siehe S. 162).[29]
Hinderliche Vorstellungen können zudem in *Gestaltgesetzen* begründet sein.[30] Wie in visuellen Darstellungen nicht alle Merkmale gleichberechtigt wahrgenommen werden, scheint dies auch bei Vorstellungsbildern der Fall zu sein. Selbst wenn derartige Vorstellungen als hinderlich erkannt werden, lassen sie sich kaum zurückdrängen oder verändern. Allenfalls können sie neue mathematische Fragen aufwerfen.[31]
Schließlich können singuläre Vorstellungen *emotional negativ* besetzt sein, so etwa das Vorstellungsbild eines dunklen Schachts – im Hinblick auf den Vorstellungsprozess ist dies gewiss kein Vorteil.[32]

Da dieser Punkt der Analyse von singulären Vorstellungen handelt, je nach Person gänzlich unterschiedliche, aber auch ähnliche produktive oder hinderliche Vorstellungen möglich sind, kann die Angabe möglicher singulärer Vorstellungen keinem systematischen Anspruch gerecht werden. Vielmehr werden in diesem Teil der Analyse – im Sinne einer ersten Bestandsaufnahme – singuläre Vorstellungen genannt, die mir beim Einsatz des Unterrichtsinstruments begegnet sind (siehe Gesichtspunkt 3 in Tab. 5.1).

[29] Für das Beispiel eines Schülers, der beim Bearbeiten einer Fragestellung aus der Analysis aufgrund seiner Vorstellungsbilder in Widersprüche gerät, obwohl er das formale Kalkül beherrscht, siehe [Aspinwall et al. 1997]. Weitere Beispiele hinderlicher Vorstellungsbilder aus dem gymnasialen Mathematikunterricht werden in [Presmeg 1992] beschrieben.

[30] In ihren Anfängen untersuchten die Gestaltpsychologen um Wertheimer und Metzger, wie optische Täuschungen zustande kommen. In den *Gestaltgesetzen* beschrieben sie Regeln, nach denen in visuell dargebotenen Reizmustern gewisse Gruppen von Bildpunkten („Gestalten“) bevorzugt wahrgenommen werden. Wertheimer interessierten solche wahrnehmungspsychologische Fragen besonders im Hinblick auf eine Erklärung des mathematischen Problemlösens. [Wertheimer 1923; Wertheimer 1957; Metzger 1975; Metzger 1986]

[31] Für entsprechende Beispiele siehe S. 162 und S. 169.

[32] Wie die aufgeführten Beispiele zeigen, gehen hinderliche Vorstellungen über Fehlvorstellungen hinaus. Für das Beispiel des dunklen Schachts siehe S. 199.

5.2.1.3 Zusammenfassung der Gesichtspunkte zur Analyse

Pólyas Warnung, die Entstehungsgeschichten von Lösungen mögen Mathematikern, die sich nicht für Methodisches interessieren, zu weitläufig erscheinen, gilt insbesondere für die Analyse der Vorstellungsübungen. Hier wird für jede einzelne Vorstellungsübung aus Abschnitt 2.2 gezeigt, welche *mathematischen Prozesse* und welche *Vorstellungsprozesse* sie anregen soll und kann.

Wie in Tabelle 5.1 dargestellt, geht es im ersten Teil jeder Analyse um die mit einer Vorstellungsübung intendierten heuristischen Prozesse (Gesichtspunkt 1). Da diese Prozesse weniger von der einzelnen Vorstellungsübung als vielmehr von ihrem Typ abhängen, geht diese Analyse hier in der Erläuterung des Typs von Vorstellungsübung auf. Im zweiten Teil der Analyse geht es um die Frage, welche Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen sich am Text einer Vorstellungsübung festmachen lassen (Gesichtspunkt 2), während im dritten Teil produktive und hinderliche singuläre Vorstellungen zur Sprache kommen, die Lernende im Verlauf der Vorstellungsübung entwickeln können (Gesichtspunkt 3). Im letzten Teil jeder Analyse werden einige klassisch-mathematische Prozesse erläutert, für die aufgrund der Vorstellungsprozesse in der ersten Phase der Vorstellungsübung das Terrain vorbereitet ist (Gesichtspunkt 4).

Es geht in diesem Abschnitt also darum, das mathematikdidaktische Potenzial jeder einzelnen Vorstellungsübung herauszuarbeiten, und nicht darum – worauf schon das Eingangszitat von Pólya hinweist –, fertige Mathematik darzustellen. Im Sinne einer vorläufigen Antwort auf die Forschungsfrage *(F3a)* (S. 133) wird sich zeigen, dass mathematische Vorstellungsübungen erst einmal dazu geeignet sind, *zentrale mathematische Inhalte zu thematisieren.* Darüber hinaus vermögen Vorstellungsübungen, *singuläre Vorstellungen als wenig beachtete Elemente mathematischen Aktivseins zu beleuchten und dadurch nutzbar zu machen. Singuläre Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler in einer Vorstellungsübung entwickeln, werden zum Ausgangspunkt für mathematische Prozesse, indem sie mathematisches Handeln auch dort ermöglichen, wo Lösungswege und Lösungen noch unbekannt sind.*

In der nun folgenden Analyse wird nicht auf Effekte eingegangen, die von einem regelmäßigen Unterrichtseinsatz von Vorstellungsübungen erwartet werden können. Solche Effekte wie etwa die Förderung von Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht werden gesondert in Abschnitt 5.3 diskutiert.

Phasen im Laufe einer Vorstellungsübung	**Gesichtspunkte zur Analyse** Mathematische Prozesse	Vorstellungsprozesse
Phase der Vorstellungen	**Gesichtspunkt 1** – Durch den Text der Vorstellungsübung *intendierte heuristische Prozesse:* · Vergegenwärtigen, Verfügbarmachen und Erkunden · Experimentieren und plausibles Schließen	**Gesichtspunkt 2** – Durch den Text der Vorstellungsübung *intendierte Vorstellungen:* · Vorstellungsbilder: vorwiegend visuelle, aber auch taktile oder auditive · Vorstellungshandeln: gedankliches Bearbeiten oder gedankliches Bewegen **Gesichtspunkt 3** – *Mögliche* von Lernenden *konstruierte Vorstellungen:* · produktive Vorstellungen · hinderliche Vorstellungen
Phase der Besprechung	**Gesichtspunkt 4** – *Mögliche mathematische Prozesse*, die durchgeführt werden können: · Darstellen und Modellieren · Argumentieren und Beweisen · Variieren und Verallgemeinern *zusätzlich:* · Herstellen von außermathematischen Bezügen (Geschichte, Kunst, Chemie, Technik etc.)	

Tab. 5.1: Vier Gesichtspunkte zur Analyse mathematischer Vorstellungsübungen

5.2.2 Analyse der Vorstellungsübungen vom Typ „Aufbau“

Bei Vorstellungsübungen des Typs „Aufbau“ geht es in der Phase der Vorstellungen darum, sich einem mathematischen Objekt – hier einem Ikosaeder und einem Würfel – von einer ungewohnten Seite her zu nähern und ihn zu *vergegenwärtigen*. Stärker als bei den anderen Typen haben hier die Vorstellungsanweisungen den Charakter von Hilfen zur Vorstellungskonstruktion; es handelt sich um Bastelanleitungen zum gedanklichen Aufbau des Vorstellungsbildes eines mathematischen Objekts. Damit wird das Objekt als Ganzes gedanklich *verfügbar*. Die nachfolgend gestellte mathematische Frage fordert auf, das Objekt auf gewisse Eigenschaften hin gedanklich zu *erkunden*. Damit können, ja sollen seitens der Vorstellenden bereits in dieser Phase Fragen auftreten.

In den beiden folgenden Abschnitten 5.2.2.1 und 5.2.2.2 werden nun die beteiligten Vorstellungsprozesse in der Phase der Vorstellungen sowie die mögliche mathematische Prozesse in der Phase der Besprechung diskutiert.

5.2.2.1 Analyse der Vorstellungsübung „Ikosaeder bauen“

Das Ikosaeder ist – im Gegensatz zum allgegenwärtigen Unterrichtsgegenstand des Würfels – gedanklich wohl nur bei wenigen Spezialisten als Vorstellungsbild verfügbar. Ganz allgemein sind geometrische Körper nicht per se gedanklich verfügbar – gedankliche Verfügbarkeit setzt die eingehende Befassung mit dem Gegenstand voraus. Eine Möglichkeit ist die Auseinandersetzung mit einem realen Modell (aus Holz oder Draht) bzw. einem virtuellen Modell (per Computer). Die Beschreibung definitorischer Eigenschaften, beispielsweise „zwanzig kongruente gleichseitige Dreiecke werden zusammengesetzt, wobei pro Ecke fünf Dreiecke aufeinandertreffen“, vermittelt auch eine Vorstellung des Körpers, die jedoch auf die lokalen Umgebungen seiner Eckpunkte beschränkt ist. Der durch den Text dieser Vorstellungsübung angeleitete *gedankliche Konstruktionsprozess* hat zum Ziel, die Verfügbarkeit dieses Körpers als Vorstellungsbild und das gedankliche Konstruieren von komplexen Körpern zu ermöglichen.

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Der Text dieser Vorstellungsübung liest sich wie die Bastelanleitung für ein Kartonmodell eines Ikosaeders. Er nimmt seinen Ausgang beim Vorstellungsbild eines regelmäßigen Sechsecks. Mit verschiedenen Werkzeugen wird diese ebene Figur gedanklich bearbeitet, daraus ein räumlich gewölbtes und gezacktes Gebilde hergestellt und mit einer Kopie dieses Gebildes zusammengefügt. Mit anderen Worten führt der Text – vom Vorstellungsbild des regulären Sechsecks ausgehend – über verschiedene Vorstellungshandlungen zum Vorstellungsbild eines geschlossenen regelmäßigen Körpers, dem des Ikosaeders.

Die Vorstellungsanweisungen (siehe Tabelle 5.2) zielen zum einen auf *visuelle* Vorstellungsbilder. Ohne im Text direkt angesprochen zu werden, können an mehreren Stellen *taktile* Vorstellungen den Vorstellungsvorgang begleiten und unterstützen. So muss, um die „durch das Schneiden neu entstandenen Kanten" miteinander verkleben zu können, das Kartonmaterial mit etwas Kraft in Form gezogen werden. Dieser Widerstand führt zum ‚Ausweichen' der ebenen Figur in die dritte, räumliche Dimension und kann quasi taktil erfasst werden. Zum anderen werden Vorstellungshandlungen ausschließlich in Form von *Bearbeitungen* angeregt, die den Prozess beschreiben, der zum intendierten mathematischen Objekt führt. Gedankliche Bewegungen werden nicht angeleitet, auch wenn solche ohne weiteres beteiligt sein können.

Die nachfolgende erste mathematische Frage „Was für ein Körper entsteht?" zielt weniger auf die Begriffsbildung (das ist an dieser Stelle wenig sinnvoll, denn entweder ist der Fachbegriff bekannt oder eben nicht) als vielmehr auf eine Gesamtschau des Körpers, auf seine *Vergegenwärtigung*. Die zweite mathematische Frage „Aus wie vielen Dreiecken, Eckpunkten und Kanten pro Ecke besteht er?" zielt auf die Analyse der kombinatorischen Beschaffenheit des Körpers. Während die Anzahl der Dreiecke noch zählbar ist, ohne sich das ganze Ikosaeder vorstellen zu müssen, muss für die Beantwortung der Frage nach den Anzahl Kanten pro Ecke mindestens das Vorstellungsbild einer ‚Schale' vorliegen. Für die Anzahl Eckpunkte schließlich ist es, wenn auch nicht zwingend, so doch von Vorteil, sich den Körper als Ganzes – nicht im metrischen, sondern eher im topologischen Sinne – vorstellen zu können.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Im Verlauf dieser Vorstellungsübung können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche *produktive* Vorstellungen konstruieren:

- Werden die Zacken *beweglich* vorgestellt, können sie – auch wenn die Zacken an der einen Schale nicht auf Anhieb perfekt schließend in die Zacken der anderen Schale greifen – zurechtgerückt werden.

- Im Moment, in dem die Zacken der beiden ‚Schalen' ineinandergeführt werden und sich ‚verzahnen', können die beiden eigenen Hände, die ge-

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
Betrachte ein ebenes regelmäßiges Sechseck aus Karton.	
	Verbinde die einander gegenüberliegenden Eckpunkte mit einem Stift, so dass
das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke gegliedert wird.	
	Ritze die Kanten der sechs Dreiecke mit einer Nadel nach.
	Schneide eines der Dreiecke heraus und lege es beiseite.
Betrachte die übrig gebliebene Figur aus fünf Dreiecken und	
	verklebe die durch das Schneiden neu entstandenen beiden Kanten miteinander.
Dabei wölbt sich die Figur zwangsläufig zu einer Art ‚Schale' auf, gebildet durch fünf gleichseitige Dreiecke.	
	An die fünf freistehenden Kanten dieser Schale klebe je ein identisches gleichseitiges Dreieck an:
Die Schale ist nun mit einem Kranz von fünf ‚Zacken' versehen.	
	Baue nochmals
eine genau gleiche, zweite Schale mit Zackenkranz.	
	Lege die eine Schale wie einen Deckel auf die andere, und zwar mit einem gewissen Abstand,
so dass sich die beiden Zackenkränze ineinander verzahnen.	
	Verklebe jede Zacke der unteren Schale mit zwei Zacken der oberen Deckelschale.

Tab. 5.2: Durch „Ikosaeder bauen“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

geneinander bewegt werden und deren fünf (!) Finger ineinandergreifen, wahrgenommen werden. Dieses *taktile* Vorstellungsbild wird zwar wie das taktile Vorstellungsbild der Zugkraft in den Vorstellungsanweisungen nicht unmittelbar angesprochen. Es kann jedoch als tragende Idee, als Kernidee der Ikosaederkonstruktion überhaupt dienen und damit den Körper gedanklich auch zu einem späteren Zeitpunkt verfügbar machen.

- Obwohl aus dem Charakter der Bastelanleitung die *Größenverhältnisse* des Körpers relativ eindeutig abzuleiten sind, kann es für die gedankliche Vergegenwärtigung des Ikosaeders günstig sein, sich ihn *größer* als faustgroß vorzustellen. So berichten einige Schülerinnen und Schüler, dass sie sich ein Ikosaeder mit einem Durchmesser ihres eigenen Körpers vorstellen. Dies erleichtert ihnen vermutlich den Blick auf Details des Körpers. Für die Bearbeitung der Frage nach dessen kombinatorischer Beschaffenheit drehen diese Personen Ecke für Ecke des Körpers vor sich hin oder „fliegen" sogar um ihr großes Ikosaeder herum.

- Die Vorstellungshandlung des Fliegens kann von angenehmen Gefühlen der Losgelöstheit und Ungebundenheit begleitet sein und in weitere Vorstellungen münden.

Auch *hinderliche* Vorstellungen sind an mehreren Stellen des Vorstellungsaufbaus möglich:

- Wird beispielsweise vorgestellt, dass sich eine ‚Schale' über der anderen befindet und dabei der Schwerkraft ausgesetzt ist, hängen deren ‚Zacken' senkrecht hinunter. Diese passen dann nicht perfekt schließend in die Lücken zwischen den Zacken der unteren Schale (die entsprechend senkrecht nach oben ragen), sondern verkeilen sich vielmehr. Das Ineinander-Verzahnen der Zacken misslingt.

- Einzelne Lernende bemerken, dass die aus fünf regulären Dreiecken gebildete Schale nicht starr, sondern *beweglich* ist. Damit kann es geschehen, dass die Schale mit ihren angesetzten Zacken zu viele Freiheitsgrade besitzt, um noch stabil zu sein und als Ganzes vorgestellt zu werden.[33]

[33] Zwei nicht aufeinander folgende Dreieckskanten können eine Scharnierfunktion übernehmen.

- Der vorgestellte Körper kann *länglicher* bzw. *gestauchter* als eine Kugel sein. Dafür sind zwei Gründe denkbar: Zum einen werden die Bauteile des Köpers tendenziell zu ‚hoch' oder zu wenig ‚hoch' (also gleichschenklig statt gleichseitig) vorgestellt. Zum anderen bewirkt die Zusammensetzung des Körpers aus zwei kongruenten Teilen eine Zentrierung auf die *Zweiteiligkeit*. In Folge werden nicht alle räumlichen Ausdehnungen des Körpers gleich wahrgenommen, sondern eine einzige fünfzählige Drehachse (statt deren sechs) und zwei verschiedene Äquivalenzklassen von Eckpunktumgebungen (Klasse des Nord- und Südpol-Eckpunkts sowie Klasse der oberen und unteren Äquatoreckpunkte) ausgemacht (statt deren eine).[34]

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Diese Vorstellungsübung ermöglicht in der Phase der Besprechung Prozesse im Bereich des mathematischen Argumentierens und Beweisens, des Variierens und Verallgemeinerns sowie des Herstellens von Bezügen zu außermathematischen Themen.

Argumentieren und Beweisen:

- Die Frage „Aus wie vielen Dreiecken, Eckpunkten und Kanten pro Ecke besteht er?" lässt sich selbst dann beantworten, wenn am vorgestellten Körper zwei verschiedene Kongruenzklassen von Eckpunktumgebungen ausgemacht werden oder die Zacken der beiden Schalen nicht perfekt ineinandergreifen. Ihre Beantwortung zielt unter anderem darauf, dass die erhaltenen Anzahlen die (für alle einfach zusammenhängenden und von Polygonen begrenzten Körper geltende) *Euler'sche Polyederformel* erfüllen. Deshalb ist aus der Kenntnis zweier Anzahlen auch die dritte festgelegt. Zudem lässt sich aus der Anzahl von Dreiecken ($20 = f$) und der Anzahl Ecken ($12 = e$) die Anzahl Dreiecke, die in einer Ecke zusammenlaufen, bestimmen ($5 = s$).[35]

- Die erste Frage „Was für ein Körper entsteht?" reicht sehr viel weiter als die zweite kombinatorische Frage. So geht sie implizit davon aus,

[34] Eine Drehachse eines Körpers heißt n-zählig, wenn n die größte natürliche Zahl ist, für die der Körper durch eine Drehung um $360°/n$ in sich übergeführt wird.

[35] Aus der Euler'schen Polyederformel $e-k+f=2$ ergibt sich mit $s\cdot e = 2\cdot k$ die Gleichung $e - \frac{s}{2}\cdot e + f = 2$.

dass ein geschlossenes Gebilde entsteht. Aufgrund der Vorstellungsanweisungen ist dies nicht unmittelbar klar. In diesem Zusammenhang kann die Frage „Weshalb greifen die Zacken der beiden Schalen *nahtlos* ineinander?“ aufgeworfen werden.
Ein erstes Argument auf dem Weg zu einer Antwort könnte folgendermaßen lauten: Da die Zacken drei- und nicht rechteckig sind, handelt es sich bei der Parallelprojektion der beiden ‚Ränder‘ der ‚Schalen‘ (längs der Drehachse) um gleich große, um ihr Zentrum gegeneinander verdrehte regelmäßige Fünfecke. Da die Projektion aller Ecken des einen Fünfecks *außerhalb* der Kanten des anderen Fünfecks liegt und die dreieckigen Zacken längs ihren Kanten an einer Schale festgemacht sind, ist jeder Zackenkranz (in Abb. 5.4 grau unterlegt) leicht ‚geöffnet‘. Insbesondere steht jede durch eine Zacke erzeugte Ebene *nicht parallel*

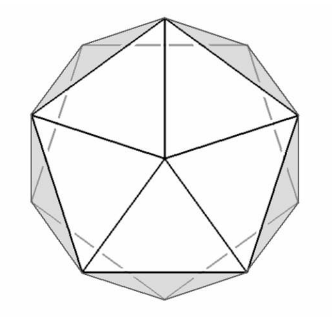

Abb. 5.4: Leicht geöffneter Zackenkranz eines Ikosaeders

zur Drehachse der beiden Schalen, das heißt die entsprechende Vorstellung ist nicht produktiv, sondern muss weiter bearbeitet werden.
Mit diesem Argument ist noch nicht bewiesen, weshalb sich die beiden Zackenkränze tatsächlich nahtlos ineinander verzahnen. Auch dass alle (zwölf) Eckpunkte des entstehenden Körpers zueinander äquivalent und äquidistant auf der Oberfläche einer Kugel angeordnet sind, folgt daraus noch nicht.

Variieren und Ausbauen der angeleiteten Konstruktion:

- Auf das vorgestellte Ikosaeder kann in weiteren Vorstellungsübungen wieder zurückgegriffen werden. So könnte die Frage nach dem Umriss des von ‚oben‘ (das heißt längs der natürlicherweise gegebenen Drehachse) bzw. von der ‚Seite' her (das heißt senkrecht zur natürlicherweise gegebenen Drehachse) parallel projizierten Körpers gestellt werden.

- Es liegt nahe, die Konstruktionsvorschrift zu *variieren*. So kann danach gefragt werden, ob bei der Verwendung anderer Bauteil-Grundformen (reguläre *Fünf*ecke, gleich*schenklige* Dreiecke) oder unter anderen Klebebedingungen (pro Ecke treffen *vier* oder sogar *sieben* Dreiecke aufeinander) wiederum geschlossene Körper entstehen und wie diese aussehen.
- Auch können – etwa in nachfolgenden Vorstellungsübungen – die analysierte Übung ausgebaut und weitere mathematische Körper konstruiert werden. Da das Dodekaeder zum Ikosaeder dual ist, lässt sich das entsprechende Kantenmodell eines Dodekaeders und damit seine Vergegenwärtigung aufbauen. („Führe dir ein Ikosaeder vor Augen. Verbinde die Mittelpunkte von benachbarten Dreiecken miteinander ..." usw.)
- Da der Ikosaederstumpf durch Abstumpfen der Ecken eines Ikosaeders hergestellt werden kann, lässt er sich auf Grundlage der vorliegenden Vorstellungsübung aufbauen. Der Prozess des Abstumpfens muss vor allem nicht als mehrschrittiges Abhobeln, sondern kann vielmehr als dynamisches Variieren der Schnitthöhe vorgestellt werden – eine typische Vorstellungshandlung in Form einer Bewegung.

Bezüge zur Chemie, Technik und zum Sport: Wie etwa das Fulleren C_{60} aus 12 Fünfer- und 20 Sechser-Kohlenstoffringen zeigt, dienen platonische und archimedische Körper bei der Entwicklung neuer chemischer Moleküle als Modell. Ganz grundsätzlich spielt die Euler'sche Polyederformel bei der Entwicklung neuer Moleküle eine wichtige, weil einschränkende Rolle.

Der Ikosaederstumpf ist aber auch Ausgangspunkt für die Entwicklung von möglichst kugelförmigen Sonden zur Messung von Gammastrahlung.[36] Und nicht zuletzt basieren die meisten genähten Fußbälle mit ihren 12 fünfeckigen und 20 sechseckigen Lederstückchen auf diesem archimedischen Körper.[37]

[36] Das entsprechende Polyeder wird im Gegensatz zum Ikosaederstumpf von 60 nichtregulären Sechsecken begrenzt (siehe `http://www.fz-juelich.de/zat/euroball`).
[37] Dies gilt nicht für den offiziellen Fußball der FIFA für die Weltmeisterschaft 2006, der – um *runder* zu sein als herkömmliche Fußbälle – aus zwei Sorten krummlinig berandeter Stücke zusammengesetzt ist.

5.2.2.2 Analyse der Vorstellungsübung „Würfel schneiden“

Der Würfel ist wegen seiner einfachen Struktur der im Unterricht wohl am meisten verwendete geometrische Körper. In dieser Vorstellungsübung geht es darum, einen etwas ungewöhnlich positionierten, auf einer Spitze stehenden Würfel auf seine Querschnitte hin zu untersuchen (siehe Abb. 5.5).

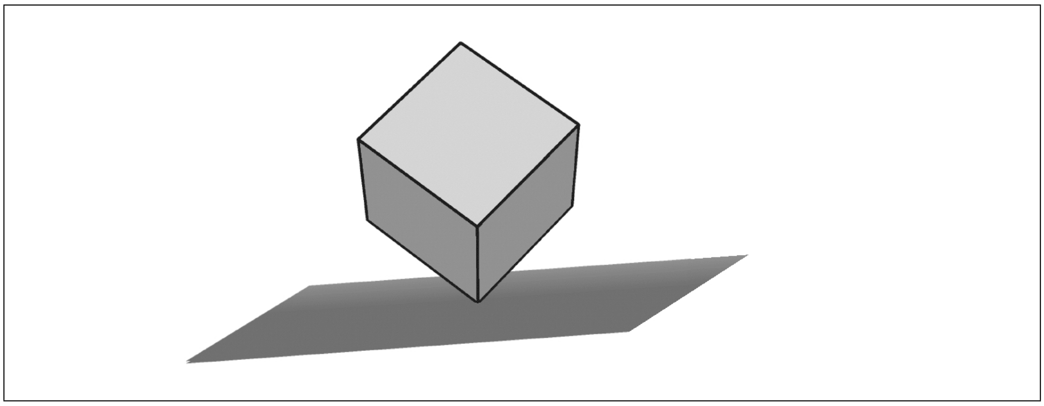

Abb. 5.5: Ungewöhnlich positionierter Würfel

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Auch hier wird gebastelt. Ein Klumpen Ton wird zu einem Würfel geformt. Nach der Auswahl einer der drei Raumdiagonalen des Würfels wird eine der Würfelecken, durch die sie führt, mit einem senkrecht zu ihr stehenden Schnitt abgeschnitten. Fortgesetzte Schnitte parallel zum ersten Schnitt produzieren eine Folge von drei- und sechseckigen Schnittfiguren. Mit anderen Worten wird aus dem Vorstellungsbild eines Würfels durch mehrere Vorstellungshandlungen eine Folge von Vorstellungsbildern – Würfelquerschnitten – aufgebaut.

Wie in Tabelle 5.3 dargestellt, fängt der Text dieser Vorstellungsübung mit dem *Vorstellungsbild* eines Klumpens Ton bzw. Plastilin an, der in mehreren Schritten *bearbeitet* wird. Daraus wird ein Würfel geformt, der in viele dünne Scheibchen zerschnitten wird. Gedankliche Bewegungen regt der Text nicht an, obwohl sie konstruiert werden und sogar produktiv sein können. Die angewiesenen *Vorstellungsbilder* sind allesamt *visueller* Ausprägung, wobei die erste Bearbeitung des Materials ohne weiteres mit der *taktilen Vorstellung* des feuchten oder kühlen Tons einhergehen kann.

Die mathematische Frage „Von welcher Form sind ihre Schnittflächen? Von welcher Form sind sie, wenn immer weiter, über die Würfel-Ecken hinaus,

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
	Forme aus einem Klumpen Ton oder Plastilin einen Würfel von etwa zehn Zentimeter Kantenbreite und lege ihn vor dich auf den Tisch.
	Stelle den Würfel auf eine seiner Ecken und halte ihn mit der einen Hand fest.
Räumlich gegenüber der Ecke, auf welcher der Würfel steht, befindet sich eine andere Würfelecke.	
	Richte den Würfel mit der Hand so aus, dass diese gegenüberliegende Ecke einigermaßen senkrecht über der ersten Ecke zu liegen kommt.
Fasse diese oberste Ecke ins Auge: Von ihr laufen drei Würfelkanten nach unten weg.	
	Führe nun mit der anderen Hand ein Messer parallel zur Tischoberfläche.
	Schneide mit einem ebenen Schnitt die oberste Würfelecke ab.
Als Schnittfläche entsteht ... ein kleines Dreieck.	
	Schneide noch weitere, dünne Scheibchen vom Würfel weg.

Tab. 5.3: Durch „Würfel schneiden“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

Scheibchen weggeschnitten werden?“ zielt darauf, sich die Folge von Schnittbildern zu vergegenwärtigen. Während die Schnittfiguren für Schnitthöhen im oberen Drittel der Raumdiagonalen gleichseitig und dreieckig sind, handelt es sich für Schnitthöhen im mittleren Drittel um sechseckige Schnittfiguren.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Im Verlauf dieser Vorstellungsübung treten folgende *produktive* Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern immer wieder auf:

- Es kann für die Beantwortung der mathematischen Frage von Vorteil sein, die (in den Vorstellungsanweisungen festgelegte) Lage des Würfels zu verändern oder eine günstigere als die (nicht explizit beschriebene) seitliche Beobachterposition zu wählen, damit die Blickrichtung in Richtung einer der Raumdiagonalen verläuft.

- Dies kann so weit gehen, dass der Würfel statt auf die Tischoberfläche in eine leicht geöffnete Hand gesetzt wird. Sind darüber hinaus kühle Feuchtigkeit und das Gewicht des Würfels spürbar, hat die entsprechende Vorstellung taktile Ausprägung.

- Wird der Würfel an einer Ecke aufgehängt vorgestellt, richtet er sich dank der Schwerkraft so aus, dass die Raumdiagonale vertikal steht. Dann gehen vom obersten Eckpunkt des Würfels symmetrisch drei Kanten aus, die in weitere Ecken münden, um sich dort in jeweils zwei neue Kanten zu spalten usw. Durch günstige Einstellung der Blickrichtung wird die dreizählige Rotationsachse des Würfels hervorgehoben.

- An dieser Stelle kann der materielle Würfel durch das Vorstellungsbild eines Kantenmodells abgelöst werden, welches in Abbildung 5.6 dargestellt ist.

- Wird in diesem Vorstellungsbild zusätzlich flüssige Farbe eingesetzt, die gleichmäßig langsam vom Zentrum die Kanten entlang läuft (in Abb. 5.6 durch graue Spuren angedeutet), können die Endpunkte des Farbmaterials als Eckpunkte eines Polygons gelesen und damit zur Erzeugung einzelner Schnittfiguren herangezogen werden.

- Die so gewählte Blickrichtung kann dazu führen, dass nicht nur das Vorstellungsbild eines Kantenmodells, sondern die Parallelprojektion des ganzen Würfels als Vorstellungsbild aufgebaut wird. An diesem kann die mathematische Frage bearbeitet werden.

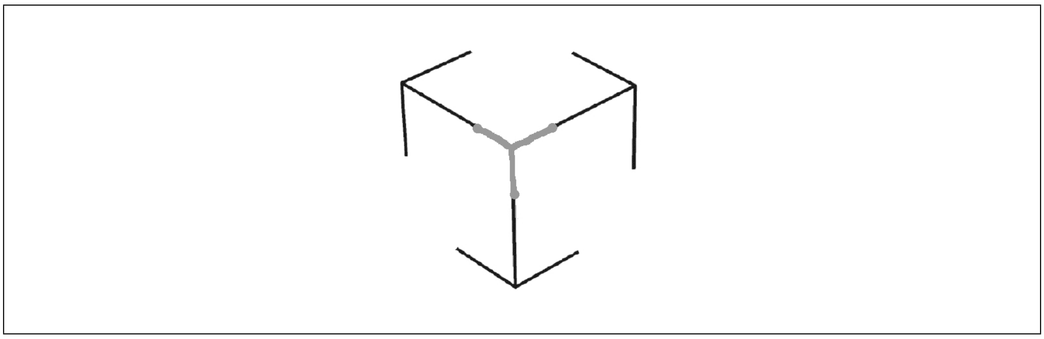

Abb. 5.6: Blick auf das Kantenmodell eines Würfels mit fließender Farbe

- Statt einer Vielzahl einzelner Schnittfiguren kann ein einziges, jedoch *bewegliches* Vorstellungsbild aufgebaut werden. Es beginnt mit einem kleinen Dreieck, das bis zu einer gewissen Größe wächst. Dann ‚brechen' die Dreiecks*ecken* zu kurzen neuen *Seiten* auf, weshalb (nichtreguläre) Sechsecke entstehen. Diese kurzen Seiten wachsen zu Lasten der langen Seiten, bis sie gleich lang sind wie diese usw. Mit anderen Worten veranschaulicht dieses Vorstellungsbild die *Metamorphose* der Schnittfigur.[38]

Hinderliche Vorstellungen, die im Verlauf des Vorstellungsprozesses oft auftreten, sind folgende:

- Eine wegen des weichen Materials naheliegende, jedoch hinderliche Vorstellung ist die der leichten Deformation des Würfels, etwa wenn er auf eine Ecke gestellt wird.
- Zeigt das Vorstellungsbild die Parallelprojektion des Würfels, ist dessen Umriss von hexagonaler Gestalt. Diese kann dem Aufbau des Vorstellungsbilds der (um 30°) *verdrehten* hexagonalen Querschnittsfläche im Weg stehen. Vermutlich wirkt hier ein Gestaltgesetz (dazu siehe S. 149).
- Bei auffallend vielen Schülerinnen und Schülern mutiert der Würfel, wenn sie ihn vom oberen Eckpunkt aus bearbeiten. Indem sie ihren ‚Blick' ausschließlich auf die von dort weglaufenden Kanten richten, blenden sie den Rest des Würfels aus und finden im Moment, da sie den Blick zurück auf den ganzen Körper richten, das Vorstellungsbild einer Pyramide (oder sogar eines Kegels) vor. Ein Grund für diese hinderliche Vorstellung könnte darin liegen, dass zusammenlaufende Kanten für nur diese beiden Körper als typisch erfahren wurden.

[38] Zur Bedeutung solcher Flächenverwandlungen in der Meraner Reform siehe S. 100.

- Bei einigen Personen lässt sich der Würfel nicht in der von den Vorstellungsanweisungen beschriebenen Lage fixieren. Vielmehr kippt er in die stabilere Lage und steht auf einer seiner Seitenflächen. In dieser auch in üblichen Würfeldarstellungen favorisierten Sicht ist die vierzählige, senkrecht zur Tischfläche stehende Rotationsachse die ausgezeichnetste aller möglichen Rotationsachsen und damit auch Blickrichtungen. Die Vierzähligkeit kann so stark dominieren, dass sich als Schnittfigur auf halber Raumdiagonalenhöhe das Vorstellungsbild eines *Vierecks* ergibt.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Auf diese Vorstellungsübung können mathematische Prozesse aus den Bereichen des Darstellens und Modellierens, Variierens und Vermutens und des Herstellens von Bezügen folgen:

Darstellen der Schnittflächen: Natürlich kann ein realer Würfel aus Ton von einer Ecke her in dünne Scheibchen geschnitten werden. Noch anschaulicher ist es, einen Plexiglaswürfel mit einem Loch in einer Ecke mit farbigem Wasser zu füllen und so zu halten, dass er auf der Spitze mit dem Loch steht und die durch die Spitze führende Körperdiagonale in Richtung des Schwerefeldes zeigt. Kann das Wasser abfließen, gibt seine sich verformende Oberfläche die Metamorphose der Schnittfiguren wieder. (Diese Herangehensweise ließe sich auch als Vorstellungsübung formulieren.)

Variieren und Ausbauen der mathematischen Frage: Auf die Vorstellungsübung folgend können Fragen gestellt werden, die in unterschiedliche Richtungen gehen und die sich ohne weiteres im Rahmen nachfolgender Vorstellungsübungen bearbeiten lassen:

- Kann vermutet werden, dass die regelmäßig-sechseckige Schnittfigur vom Flächeninhalt her größer als die anderen Schnittfiguren ist? Und gibt es eine andere Schnittrichtung, die eine Schnittfigur mit noch größerem Flächeninhalt erzeugt?[39]
- Eine andere Gruppe von Fragen dreht sich um die Anzahl Kanten, die ebene Schnittfiguren eines Würfels aufweisen: Gibt es Schnittfiguren

[39] Der flächenmäßig maximale ebene Würfelschnitt führt durch zwei einander räumlich gegenüber liegende Würfelkanten. Der Inhalt dieser rechteckigen Fläche ist nur knapp 9 Prozent größer als derjenige des Hexagons (siehe auch `http://mathworld.wolfram.com/Cube.html`).

mit vier oder fünf Kanten? Kann es Schnittfiguren mit sieben oder mehr Kanten geben?

- Welche (platonischen und archimedischen) Körper entstehen, wenn alle acht Würfelecken scheibchenweise abgeschnitten werden?

- In einer weiteren Vorstellungsübung lässt sich beschreiben, wie der Würfel in drei Pyramiden zerlegt wird, deren Grundflächen die drei unteren Würfelseitenflächen bilden und deren Spitzen in der oberen Würfelecke zusammenlaufen. Dieser Sachverhalt ($V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{Würfel}}$) ist dank der unüblichen Positionierung sogar relativ leicht vorstellbar. Wenn der Würfel wie üblich auf einer Seitenfläche liegt, bereitet diese Vorstellungsübung doch beträchtlich größere Schwierigkeiten.

- Die dreizählige Drehachse lässt sich in den Kontext der Hexaedergruppe stellen: Welche Drehachsen gibt es sonst noch? Wie viele (gleichsinnige) Deckbewegungen, die den Würfel in sich überführen, gibt es insgesamt?

- Welcher Rotationskörper entsteht, wenn der Würfel um seine Raumdiagonale rotiert wird? Diese Frage erinnert an Wittmanns Frage nach dem Körper, der entsteht, wenn ein um die x-Achse rotiertes Flächenstück unter der Normalparabel zusätzlich um die y-Achse rotiert wird (siehe S. 88). In beiden Fragen kommt einmal mehr die Grundhaltung des operativen Prinzips – „Was passiert mit ..., wenn ...?“ – zum Ausdruck, unter der ein materiell nicht verfügbares geometrisches Objekt rotiert und untersucht wird.[40]

Bezüge des Würfelquerschnitts zu Architektur und Kunst: Häuser werden in der Regel aus praktischen Gründen so gebaut, dass die Bodenflächen der Räume parallel zur Bodenfläche ihrer äußeren Hülle verlaufen. Eine Ausnahme sind Piet Bloms so genannte „Wohnbäume“ in Helmond, die aus einem auf der Spitze stehenden Würfel bestehen, der von einem Pfeiler in Richtung der Raumdiagonalen des Würfels getragen wird. In diesen Häusern sind drei Wohnebenen eingezogen, wovon die mittlere die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat.[41]

[40] Für ein Bild des entstehenden einschaligen Drehhyperboloids mit aufgesetzten Drehkegeln siehe [Klein 2004, S. 49] oder unter `http://mathworld.wolfram.com/Cube.html`.
[41] Fotos vom Bau solcher „Wohnbäume“ siehe unter `http://www.adriaansgroep.nl/pagAref005.html`. Entsprechende Vorschläge für den Mathematikunterricht finden sich in [Lauber 1997] oder unter `https://www.klett.de/sixcms/media.php/8/mathlive.pdf`.

Künstlerisch hat sich Max Bill mit der Würfelhalbierung auseinandergesetzt. Für eine Parkanlage in Jerusalem hat er Vollwürfel aus schwarzem Granit auf verschiedene Arten halbiert und unter anderem eine Steinplastik mit einer regelmäßig sechseckigen Schnittfläche geschaffen.[42]

5.2.3 Analyse der Vorstellungsübungen vom Typ „Problemlösen“

Bei derartigen Vorstellungsübungen geht es in der Phase der Vorstellungen um mathematische Prozesse des *Experimentierens* und *Vermutens*. In den beiden Beispielen „Leiter rutschen“ und „Collatzfolge“ steht ein mathematisches Problem im Zentrum. Die Vorstellungsanleitung des ersten Beispiels kleidet dieses in einen außermathematischen Sachzusammenhang, während im Beispiel der Collatzfolge weniger die Einkleidung als vielmehr das Problem selbst beschrieben wird. Der außermathematische Sachzusammenhang soll bei der rutschenden Leiter das Experimentieren und das Formulieren einer Vermutung erleichtern. Beim zweiten Beispiel ist dies nicht nötig, da die Schülerinnen und Schüler trotz des bescheidenen experimentellen Ausgestaltungsraums ziemlich bald zu einer Vermutung gelangen. Die abschließend gestellte Frage formuliert das mathematische Problem und eröffnet damit das Feld für eigene Erkundungen und Experimente.

In den folgenden beiden Analysen werden nun die beteiligten Vorstellungsprozesse in der Phase der Vorstellungen und mögliche mathematische Prozesse in der Phase der Besprechung dargestellt.

5.2.3.1 Analyse der Vorstellungsübung „Leiter rutschen“

In dieser Vorstellungsübung soll die Bahn eines bewegten, materiell nicht verfügbaren Objekts untersucht werden. Hier wird ein Bild- und Handlungszusammenhang entworfen, um eine mathematische Frage zu stellen, ohne jedoch ein geeignetes Verfahren zu dessen Lösung anzugeben. Damit geht es in dieser Vorstellungsübung um den mathematischen Prozess des *Problemlösens*.

Selbst wenn der beschriebene Gedankengang auf dem Papier oder mit einem Modell (etwa einem Stock in einer Zimmerecke) durchgeführt würde, bliebe das ‚Sehen‘ der Bahn ein rein vorgestellter Akt. Es würde also durch eine solche Realisierung nichts Wesentliches gewonnen. Zudem könnte in diesem Fall konkretes Handeln eher irreführend sein. Da der vom materiell vor-

[42] Fotos von Bills Würfelhalbierungen finden sich in [Guderian 1990].

handenen Stock überstrichene Bereich stärker in die Vorstellung drängt als die vom Mittelpunkt überstrichene Kurve, ist die Gefahr, beim Führen des Stocks eine asymptotische, nach oben gekrümmte Leuchtkurve zu vermuten, eher größer als beim gedanklichen Experiment in der vorliegenden Vorstellungsübung.

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Der Text dieser Vorstellungsübung beginnt mit der Schilderung eines Vorstellungsbilds: Ein abgedunkeltes Zimmer, eine Leiter mit einer Lampe und die vorstellende Person selbst. Die Person soll die Leiter an die Wand stellen und sich als Beobachterin seitlich davor positionieren. Anschließend wird sie aufgefordert, sich einerseits vorzustellen, dass die Leiter in eine bestimmte Rutschbewegung gerät, und andererseits zu beobachten, wie diese Bewegung abläuft.

Wie aus Tabelle 5.4 ersichtlich, werden im Text dieser Vorstellungsübung nur *visuelle* Vorstellungen beschrieben. Der Text enthält keine Anregungen zum Aufbau taktiler Vorstellungen, wenn sie auch ohne weiteres möglich sind. Zum Aufbau des Szenarios dieser Vorstellungsübung sind Vorstellungshandlungen in beiden Formen – sowohl in der bearbeitenden als auch der bewegenden – nötig. In dieser Vorstellungsübung ist *gedankliches Bewegen* also nicht erst bei der Bearbeitung des mathematischen Problems gefragt. Damit ist diese Vorstellungsübung mit der operativen Übung „Kippbewegung“ von Wittmann verwandt, in der die Bahn des Eckpunkts eines auf einer Geraden abrollenden Quadrats untersucht wird (siehe S. 88).

Die mathematische Frage lautet hier: „Welche Leuchtkurve beschreibt bei dieser Bewegung die in der Holmmitte befestigte Lampe im dunklen Zimmer?“ Damit soll sich die vorstellende Person gedanklich nur auf einen Punkt der Leiter, die Mitte des Holms, konzentrieren und die Leuchtkurve, auf der sich der Punkt als Teil der Leiter bewegt, antizipieren. Dazu ist ein ständiger *Perspektivenwechsel* zwischen der rutschenden Leiter inklusive Umfeld und einem Ausschnitt erforderlich: Hier die rutschende Leiter, die gewissermaßen die Randbedingung für die Leuchtkurve darstellt, dort die in Folge des Rutschens bewegte Lampe.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Folgende singuläre Vorstellungen sind produktiv und können im Prozess des Vorstellungsaufbaus und der Lösung des gestellten Problems nützlich sein:

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
Stell dir eine Leiter in einem hellen, geräumigen Zimmer vor.	
	Nimm die Leiter und lehne sie dicht an die Wand.
	Stell dich selbst vor die linke Seite der Leiter hin und lehne dich mit deiner linken Schulter an die Wand an.
So siehst du von der Leiter nur noch den linken Holm vor dir, wie er nach links an die Zimmerwand angelehnt ist.	
In der Mitte des dir zugewandten Leiterholms ist eine Lampe angebracht.	
	Verdunkle das Zimmer und schalte die Lampe ein.
Du siehst sie leuchten, als Leuchtpunkt.	
	Das untere Leiterende beginnt, ganz langsam auf dem Boden zu rutschen, ganz langsam nach rechts, von der Wand weg.
Das obere Leiterende berührt dabei weiter die Wand	
	und gleitet an ihr entlang hinunter.
Im Moment, da das Kopfende den Boden berührt,	
	rutscht die Leiter nicht weiter, sondern bleibt liegen.

Tab. 5.4: Durch „Leiter rutschen“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

- Zur Beantwortung der mathematischen Frage können die Schülerinnen und Schüler die Leiter gedanklich – so oft und schnell sie wollen – rutschen lassen und wieder zurückschieben.

- Falls sich dabei kein Bild der Leuchtspur einstellt, kann die kontinuierliche Bewegung ‚gequantelt' werden: Leiter anhalten, Photo machen, Leiter etwas weiterrutschen lassen, wieder Photo machen usw. Damit ergibt sich keine statische Vorstellung der ganzen Spur, sondern eine Folge von Leuchtpunkten.

- Vor allem zu Beginn, aber auch gegen Ende scheint die Bewegung der Leiter leichter erfassbar zu sein, während sie sich in der Mitte des Prozesses zu schnell bewegt. Damit können eigene, engere Fragen formuliert werden: Wie bewegt sich die Lampe zu Beginn und gegen Ende der Leiterbewegung?

- Die mathematische Frage kann auch vom Ende her angegangen werden. Vermutungen wie etwa die, dass die Leuchtkurve gerade (nicht gekrümmt) ist, lassen sich austesten. Dabei ist es günstig, sich vorzustellen, dass der Mittelpunkt der Leiter in einer *Führung* in Form der vermuteten Kurve (zum Beispiel einer Geraden) läuft. Kann die Leiter dann noch rutschen, so dass ihre Enden die Wand bzw. den Boden dabei berühren? Oder wird die Leiter durch die Führung blockiert?

- Folgende Umstrukturierung der ganzen Situation kann produktiv sein: Es wird eine zweite Leiter in das Zimmer gestellt. Ihr unteres Ende soll fest an der Stelle, wo Wand und Boden aufeinandertreffen, stehen, und die beiden Leitern sollen in ihren Mitten drehbar aneinander befestigt sein. Während die erste Leiter rutscht, *kippt* die zweite Leiter.

Folgende Vorstellungen sind hinderlich, um den Vorstellungsanweisungen weiter folgen zu können bzw. um das gestellte Problem lösen zu können:

- Die Rutschbewegung der Leiter kann wegen unterschiedlicher individueller Ausgestaltungen nicht vorgestellt werden (die Leiter ist länger als das Zimmer hoch, das Zimmer ist mit anderen Gegenständen vollgestellt, der Zimmerboden ist mit einem dicken Teppich bedeckt). Auch kann es sein, dass die Verdunkelung des Zimmers nicht klappt und infolgedessen die Lampe keine Leuchtspur hinterlässt.

- In einem tatsächlich realen Kontext müsste die perspektivische Verzerrung der Leuchtkurve mit berücksichtigt werden, was in der Vorstellungsübung jedoch nicht beachtet werden soll.

- Gewöhnlich stellen sich die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der mathematischen Frage eine linksgekrümmte (konvexe) statt eine rechtsgekrümmte (konkave) Leuchtkurve vor.[43] Diese schmiegt sich tangential an Wand und Boden an und sieht aus wie die Randkurve des Bereichs, den die Leiter von der Seite betrachtet beim Rutschen überstreicht – eine Astroide (siehe Abb. 5.7).[44]

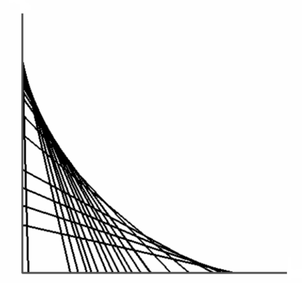

Abb. 5.7: Astroide als Randkurve des rutschenden Leiter

Mit anderen Worten scheint – trotz der Verdunkelung des Raums – das Vorstellungsbild der ganzen Leiter nicht ausgeblendet werden zu können: Das Vorstellungsbild der ganzen, rutschenden Leiter *dominiert* das Vorstellungsbild der daran angebrachten und bewegten Lampe. Wie schon in der Vorstellungsübung „Würfel schneiden" scheinen die Vorstellungsbilder auch hier den Gestaltgesetzen zu unterliegen (siehe S. 162 bzw. S. 149). So könnte im vorliegenden Beispiel das „Gesetz der Einfachheit" dafür verantwortlich sein, dass die Astroide bevorzugt vorgestellt wird.[45]

[43] Eine auf einem Intervall $[a, b]$ zweimal differenzierbare Funktion f ist genau dann *konvex*, wenn ihre zweite Ableitung f'' auf dem Intervall $[a, b]$ nichtnegativ ist: $f''|_{[a,b]} \geq 0$. Ist f'' echt positiv, wird f *streng konvex* oder *linksgekrümmt* genannt.

[44] Üblicherweise entsteht die Astroide als Bahn eines festen Punktes auf dem Umfang eines Kreises, der auf der Innenseite eines viermal größeren Kreises abrollt.

[45] Nach diesem Gesetz (auch „Tendenz zur guten Gestalt" oder „Faktor der Prägnanz" genannt) werden visuelle Darstellungen so erlebt, dass die erlebte Struktur möglichst ‚einfach' ist. ([Wertheimer 1923], [Metzger 1975, S. 201–230], [Metzger 1986, S. 145 ff. und S. 322 ff.] sowie [Häcker & Stapf 1998, S. 325])

- Hinderlich ist auch, wenn die beschriebene, an die Wand gelehnte Leiter in einer Vorstellungshandlung *bestiegen* wird. Steht man in der Mitte und rutscht die Leiter unter einem weg, so wird die vertikale Bewegung nach unten vom Muskelsinn sehr viel stärker wahrgenommen als die horizontale, von der Wand weg führende Bewegung. Damit scheint auch bei dieser Vorstellung die Bahn der Leitermitte tangential der Wand entlang zu verlaufen.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Das mathematikdidaktische Potenzial dieser Vorstellungsübung liegt im Bereich der mathematischen Prozesse des Darstellens und Modellierens, des Argumentierens und Beweisens, des Verallgemeinerns sowie des Herstellens von Bezügen.

Darstellen der Vermutung: In der Phase der Besprechung teilt jede Person zuerst einmal ihre vermutete Lösung des mathematischen Problems mit. Danach bedarf es der Argumente, um die Vermutungen zu stützen oder zu widerlegen. So kann das beschriebene Vorstellungsbild erweitert werden, indem man sich eine zweite Leiter vorstellt, deren Fuß unverändert an der Wand bleibt und mit der ersten Leiter in der Mitte verbunden ist, wie eine *Schere*. Beim Rutschen der ersten Leiter kippt die zweite Leiter, wodurch unter anderem ihr Mittelpunkt einen Viertelkreis beschreibt.

Eine andere Möglichkeit liegt darin, die Leiter in ‚infinitesimal' kleinen Schritten zu bewegen, gewissermaßen gegen den Widerstand der Schwerkraft. Zu Beginn bewegt sie sich fast nur senkrecht von der Wand weg, zum Schluss fast nur senkrecht zum Boden hin. Im mittleren Bereich bewegt sie sich etwa gleich weit nach unten wie nach rechts, was für eine Kreisbewegung spricht.

Modellieren und Beweisen der Vermutung: Um die Vermutung mathematisch schlüssig zu begründen, das heißt zu beweisen, muss die Situation mathematisch modelliert werden. Dazu kann das Vorstellungsbild der überkreuzten Leitern (siehe Abb. 5.8) mit der durch die Leiterenden erzeugten Vierecksfigur ergänzt werden. Da sich in jedem rechtwinkligen Dreieck die beiden nichtrechten Winkel zu einem rechten Winkel ergänzen, handelt es sich bei der Vierecksfigur um ein Rechteck. Zusammen mit der Eigenschaft, dass im Rechteck die beiden Diagonalen gleich lang sind und sich halbieren, folgt die Konstanz des Schnittpunkts vom Eckpunkt – und damit die Kreisgestalt der Leuchtkurve.

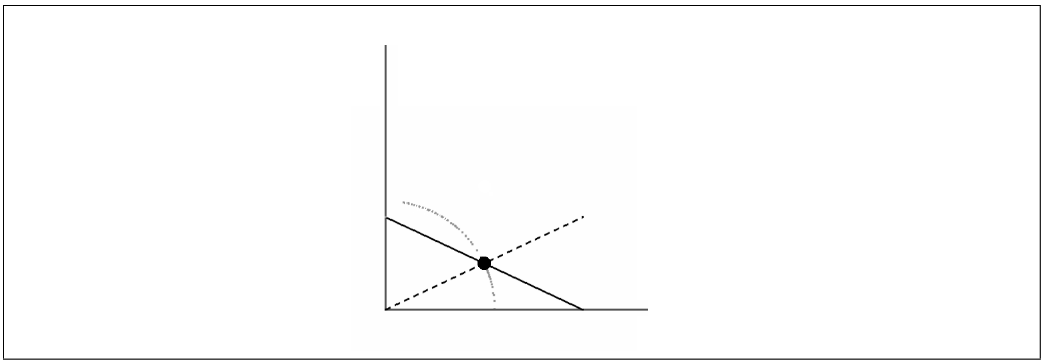

Abb. 5.8: Modellierung durch Ergänzung einer zweiten Leiter

Die Modellierung kann auch durch einen Kreis mit der Leiter als Halbmesser, durch Ergänzung mit ähnlichen Dreiecken oder durch Einbettung in ein Koordinatensystem erfolgen (siehe Abb. 5.9). Im Anschluss daran können je

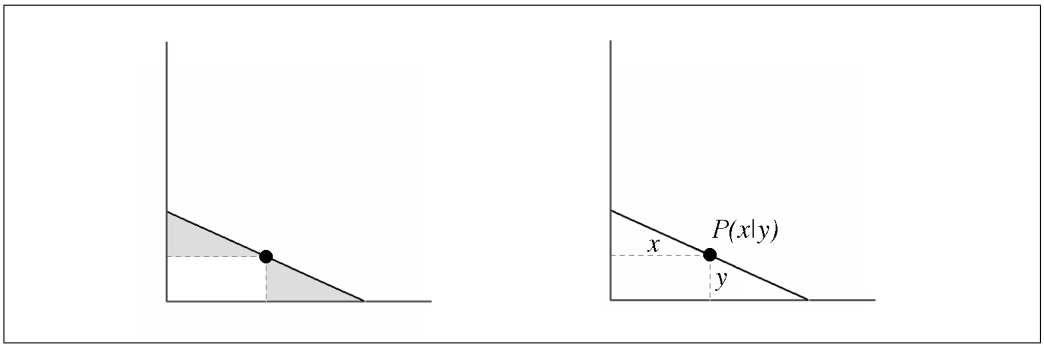

Abb. 5.9: Modellierung durch Ergänzung ähnlicher Dreiecke (links) bzw. durch Einbettung ins Koordinatensystem (rechts)

nach Modellierung synthetisch-geometrische (Thaleskreis) oder algebraische (Satz von Pythagoras, Verhältnisgleichungen) Argumentationen folgen.

Variieren der mathematischen Frage: Im Weiteren lässt sich die Fragestellung variieren: Wie sieht die Bahn einer Lampe aus, die ober- oder unterhalb der Leitermitte angebracht ist (siehe Abb. 5.10, links)? Hier zeigt sich ein Vorteil der Modellierung mit einem Koordinatensystem, da die entsprechenden Verhältnisgleichungen unmittelbar zur *Ellipsengleichung* führen.

Die Lampe kann auch auf einem Halbkreis über der Leiter als Durchmesser angebracht werden. Wie sieht ihre Bahn dann aus (siehe Abb. 5.10, rechts)?[46]

[46] Quelle: `http://www.madaba.de`

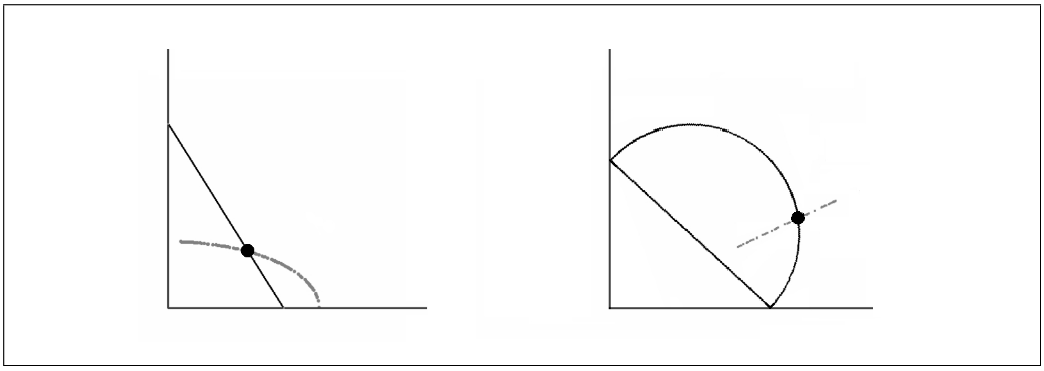

Abb. 5.10: Lampenanbringung unterhalb der Mitte der Leiter (links) bzw. auf einem Halbkreis über der Strecke (rechts)

Bezüge der rutschenden Leiter zur Technik: Von der rutschenden Leiter lassen sich verschiedene Bezüge zu mechanischen Geräten herstellen, etwa zur Papierstreifen-Konstruktion von Kreisen und Ellipsen oder zum Ellipsenzirkel von Proclus, da beide auf dem Prinzip zweier gerader, aufeinander senkrecht stehender Führungen beruhen.

5.2.3.2 Analyse der Vorstellungsübung „Collatzfolge“

Der Mathematikunterricht vermittelt den Schülerinnen und Schülern ein Bild von Mathematik, in der es nichts mehr zu entdecken gibt und alle einfach zu verstehenden Fragen längst beantwortet sind. Diesem fertigen Bild von Mathematik will die vorliegende Vorstellungsübung entgegentreten. In ihr wird folgendes Bildungsgesetz nach Collatz untersucht:

$$\text{coll} : x \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} 3 \cdot x + 1 & \text{für } x \text{ ungerade} \\ x/2 & \text{für } x \text{ gerade} \end{cases}$$

In der Exploration der entstehenden Collatzfolge

$$\langle\ a_n \mid a_1 \in \mathbb{N} \text{ und } a_{n+1} := \text{coll}(a_n) \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots\ \rangle$$

kann das Phänomen des Zyklischen erlebt werden, das nach mehreren Zwischenwerten unabhängig vom Startwert a_1 einzutreten scheint.[47]

Diese Vorstellungsübung erinnert an Wittmanns „merkwürdige Rechnung mit Brüchen“, die er als Beispiel einer operativen Übung zum Bruchrech-

[47] Obwohl diese Vermutung in der Regel Collatz zugeschrieben wird, ist ihr exakter Ursprung nicht geklärt [Lagarias 1985].

nen angibt (siehe S. 88). Zum einen haben beide Übungen einen nichtgeometrischen Gegenstand zum Inhalt, zum anderen werden beide Zahlenfolgen unabhängig von der Startzahl früher oder später zyklisch. Im wesentlichen Unterschied zur Collatzfolge, deren Zyklizität bis heute nicht bewiesen ist, lässt sich beweisen, dass Wittmanns Folge zyklisch ist.

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, eine beliebige natürliche Zahl zwischen 10 und 26 zu wählen und auf diese Zahl das Collatz'sche Bildungsgesetz anzuwenden, immer und immer wieder.[48] Die entstehenden Ergebnisse sollen in Form von Vorstellungsbildern festgehalten werden, damit sie beobachtet und miteinander verglichen werden können.

Im Unterschied zu allen anderen vorliegenden Vorstellungsübungen wird der mathematische Inhalt hier *nicht* in einen geometrischen oder außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhang eingebettet, sondern in seiner arithmetisch-algebraischen Form präsentiert (siehe Tab. 5.5). Deshalb kann die angewiesene Vorstellungshandlung – Kopfrechnen – nur wenig konkret sein. Die entsprechenden Vorstellungshandlungen sind nicht von der Art gedanklichen Bewegens. Sie drücken vielmehr die gedankliche *Bearbeitung* von Zahlen aus. Insofern hängt diese Vorstellungsübung mit Wittmanns operativem Beispiel zum Bruchrechnen zusammen (siehe S. 88).[49]

Um die berechneten Folgenglieder $\langle a_n \rangle$ beobachten und miteinander vergleichen zu können, wird die Konstruktion entsprechender *Vorstellungsbilder* angeleitet. Als Gedankenstützen sind diese Vorstellungsbilder Mittel zum Zweck. Die entsprechende Anweisung könnte ohne weiteres auch anders lauten, zum Beispiel „Sage dir die Zahl vor!“. Um den Schülerinnen und Schülern freie Wahl bei der Organisation ihrer Vorstellungen zu lassen, könnte diese Anweisung ganz weggelassen werden.

Die Aufforderung, das Verfahren weiterzuführen und nach einer „Gesetzmäßigkeit“ zu suchen, setzt einen Prozess in Gang, der eine Folge von Zahlen produziert. In der Regel folgt – nach einer kurzen Pause – eine weitere Anweisung: „Führe dasselbe Verfahren noch mit anderen Startwerten durch!“

[48] Die Einschränkung, dass der Startwert nicht größer als 26 sein soll, hat rein praktische Gründe: Während für alle Startwerte zwischen 2 und 26 bis zum ersten Auftauchen der Eins noch maximal 23 Rechenschritte nötig sind, sind es für den Startwert 27 bereits 111 Rechenschritte (siehe `http://www.research.att.com/~njas/sequences/A006577`).

[49] Wittmann beruft sich dort auf die Beschreibung des Zusammenhangs von arithmetischem bzw. algebraischem Operieren mit Handlungen im Sinne von Piaget (siehe dazu auch das Zitat auf S. 91).

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
	Wähle eine beliebige natürliche Zahl zwischen 10 und 26 und
schreibe sie vor deinem inneren Auge auf.	
	Fahre nun folgendermaßen weiter: Ist die Zahl gerade, halbiere sie, und ist sie ungerade, verdreifache sie und zähle eins dazu.
Schreibe dir die entstandene Zahl deutlich auf,	
	und verfahre mit ihr wie mit deiner ursprünglich gewählten Zahl: Ist sie gerade, halbiere sie, und ist sie ungerade, verdreifache sie und zähle eins dazu.

Tab. 5.5: Durch „Collatzfolge“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

Damit kann die Vermutung entstehen, dass die Folge für *jeden* Startwert in den Zyklus $\ldots \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \ldots$ mündet.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Wegen des fehlenden außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhangs fällt es den Schülerinnen und Schülern bei dieser Vorstellungsübung nicht leicht, singuläre Vorstellungen aufzubauen. Zumindest berichten sie nur spärlich darüber. Dennoch nennen sie singuläre Vorstellungen, die *produktiv* für den Aufbau der intendierten Vorstellungen bzw. für die Beantwortung der Frage sind:

- Einige Personen verbinden mit den berechneten Werten Positionen auf ihrer singulären Zahlenlinie, zwischen denen sie hin und her springen.[50]
- Manche der genannten Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen hängen mit der Memorierung der berechneten Werte zusammen. So berichten Schülerinnen und Schüler immer wieder von synästhetischen

[50] Zu verschiedenen singulären, räumlich-geometrischen Anordnungen der reellen Zahlen siehe die entsprechende Fußnote auf S.117.

Farbempfindungen, die sie im Zusammenhang mit den berechneten Werten ‚sehen' und die ihnen als Gedächtnisstütze dienen. Gerade die Farbgebung ist immer wieder von positiven Emotionen begleitet.

- Wird eine gerade Zahl als Verdoppelung einer ungeraden Zahl ‚gesehen', kann die Verifizierung der Ganzzahligkeit schon die Halbierung *beinhalten*. Ebenfalls kann *immer*, nachdem verdreifacht und 1 addiert wurde, ohne weitere Überprüfung des Ergebnisses halbiert werden – ein zusätzlicher ökonomischer Effekt.

- Eine weitere Gruppe singulärer Vorstellungen hängt mit dem Phänomen zusammen, dass die Folge in einen Zyklus mündet. Dieses Phänomen kann in der *Vorstellungshandlung* des Hüpfens besonders eindringlich erfahren werden. Manche Schülerinnen und Schüler bauen dabei das *Vorstellungsbild* einer irgendwie geformten Zahlenlinie auf, die zu einem geschlossenen Zahlenkreis umgebaut wird und nur noch die Positionen der 4, der 2 und der 1 enthält.

Bei dieser Vorstellungsübung ist nicht nur von *hinderlichen*, sondern auch von *fehlenden* singulären Vorstellungen zu berichten:

- Wird die Farbgebung der Zahlen 4, 2 und 1 als emotional unangenehm empfunden, kann es Schülerinnen und Schülern schwer fallen, sich zu konzentrieren bzw. sich die Zahlen zu merken.

- Einige Schülerinnen und Schüler rechnen munter drauflos. Sie verweilen bei einem jeweils berechneten Folgenglied nicht länger, als es für den nächsten Berechnungsschritt notwendig ist, und können im Nachhinein die Werte der Folgenglieder nicht mehr reproduzieren. Es scheint so zu sein, als ob der Rechenvorgang in ihrem Innern gewissermaßen ‚automatisch' abliefe, will heißen, ohne dass er vom Aufbau von Vorstellungsbildern oder Vorstellungshandlungen begleitet wäre.

- Dieselben Schülerinnen und Schüler erkennen oft – richtiges Rechnen vorausgesetzt – erst nach mehrmaligem Durchlaufen der Werte 4, 2, 1 und 4, dass es sich dabei um einen Zyklus handelt, der keine neuen Werte mehr zu Tage fördert. Es sieht so aus, als ob ihre Aufmerksamkeit stärker dem Vorgang des Berechnens als der Beobachtung des Berechneten gilt.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Je nachdem muss als Erstes die Frage geklärt werden, weshalb ein Bildungsgesetz, das einen bestimmten Wert zum *zweiten* Mal produziert, keine neuen Werte mehr zu Tage fördern kann, sondern in einen Zyklus mündet. Die nachfolgenden mathematischen Diskussionen drehen sich um den Unterschied zwischen einer plausiblen Vermutung und einem mathematischen Beweis sowie um das Verhalten der Collatz'schen Folge für negative Startzahlen.

Vermuten ist nicht Beweisen: Aufgrund der Experimente der Schülerinnen und Schüler liegt die Vermutung nahe, dass das Collatz'sche Bildungsgesetz unabhängig vom gewählten Startwert in den Zyklus $\ldots \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \ \ldots$ führt, wenn auch der ‚Weg' dorthin unterschiedlich weit ist. Selbst wenn jede Collatzfolge für einen Startwert, der kleiner ist als 500 Billiarden, in diesen Zyklus mündet, ist bis heute nicht bewiesen, dass dies für alle möglichen natürlichen Startwerte zwangsläufig der Fall sein muss. Weiter ist bekannt, dass falls die Collatzfolge in einen Zyklus ohne die Zahl 1 münden würde, dieser Zyklus eine Länge hätte, die über 100 Millionen liegt [Halbeisen & Hungerbühler 1997]. Mit anderen Worten scheint diese mathematische Frage zwar eine plausible Antwort zu besitzen, sich jedoch bis heute einer endgültigen Beantwortung zu entziehen.[51]

Verallgemeinerung durch negative Startwerte: Die Frage dieser Vorstellungsübung wird verallgemeinert, wenn das Collatz'sche Bildungsgesetz auf negative Startwerte angewendet wird. Damit verändert sich die Sachlage allerdings nur unwesentlich.[52]

[51] Der Rekord stand im Juli 2006 bei $14 \cdot 2^{55} \approx 5.04 \cdot 10^{17}$ (für aktuelle Computerergebnisse siehe unter `http://www.ericr.nl/wondrous/index.html`). Eine Einführung in die Collatzvermutung siehe in [Wiersching 2000], ausführliche Informationen siehe in [Lagarias 1985] sowie unter `http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html`.

[52] Die Zahlenfolge scheint ebenfalls für alle negativen Startwerte zyklisch zu werden, allerdings sind bis heute bereits *drei* mögliche Zyklen bekannt.

5.2.4 Analyse der Vorstellungsübungen vom Typ „Begründungen"

Vorstellungsübungen vom Typ „Begründungen" sind durch den Handlungszusammenhang, der in ihnen aufgebaut wird, mit Wittmanns operativen Beweisen verwandt. Hier wie dort wird mit mathematischen Objekten operiert und die Wirkungen beobachtet (siehe S. 86). Allerdings sind Vorstellungsübungen stärker von alltäglichen Handlungen und Erfahrungen durchsetzt.[53]

Entsprechende Vorstellungsübungen leiten einen mathematischen Prozess an, der aus dem Bereich des *plausiblen Schließens* stammt. Wie bei Vorstellungsübungen vom Typ „Problemlösen", in denen ein außermathematischer Handlungszusammenhang zur Formulierung eines Problems beschrieben wird, wird auch hier ein mathematischer Sachverhalt in den Kontext eines außermathematischen Handlungszusammenhangs gestellt und dadurch ein gedanklicher Vorstellungsprozess angeregt. Vorstellungsübungen dieses Typs sind somit *erklärende Begründungen*. So kann mit den Beispielen „geometrische Reihen berechnen" und „ebenes Dreieck begehen" das *subjektive Erlebnis von Verstehen* eines mathematischen Sachverhalts (hier der Formel zur Berechnung unendlicher geometrischer Reihen bzw. dem Satz über die Innenwinkelsumme) einhergehen – unabhängig davon, ob der entsprechende Sachverhalt den Vorstellenden bereits bekannt ist oder nicht. Die mathematische Frage fordert bei diesen Vorstellungsübungen dazu auf, Gedanken und Vorstellungen zusammenzuführen, das heißt sich eines mathematischen Inhalts und des erlebten Verständnisses bewusst zu werden.[54]

In den folgenden Analysen (Abschnitte 5.2.4.1 und 5.2.4.2) werden die an den beiden Vorstellungsübungen beteiligten Vorstellungsprozesse und mögliche mathematische Prozesse besprochen.

---

[53] Fischer und Malle unterscheiden *Handlungs-* von *Beziehungsbeweisen*, wenn sie schreiben: „Je ‚strenger' die Mathematik aufgebaut wird, desto mehr wird im Allgemeinen gefordert, Handlungselemente auszuschließen und möglichst alles in Form von formalen Beziehungen auszudrücken. Umgekehrt spielen beim heuristischen Denken aber die Handlungen eine oft wichtigere Rolle als formale Beziehungen. Bei einer integrativen Sicht von Mathematik, wie wir sie im Unterricht anstreben, darf keiner dieser beiden Aspekte fehlen." [Fischer & Malle 1985, S. 186, Hervorhebung im Original]

[54] Nach Heymann muss Verstehen als mentaler Prozess aufgefasst werden, der unter anderem auch eine *Erlebnisdimension* enthält: „Aus subjektiver Sicht liegt Verstehen vor, wenn ein zuvor fremdartiger mathematischer Sachverhalt ‚Sinn macht'. Das Verstehen bzw. der Sinn, der sich damit einstellt, geht mit einem mehr oder minder intensiven ‚Aha'-Erlebnis einher und wird als Belohnung für die vorangegangene geistige Bemühung erlebt, manchmal auch als Geschenk (Intuition). Verstehen steht also für ein emotional positiv getöntes subjektives Erleben eines kognitiven Prozesses." [Heymann 1996, S. 217]

5.2.4.1 Analyse der Vorstellungsübung „Reihe berechnen“

In Schulbüchern finden sich geometrische Argumente dafür, dass eine geometrische Reihe – wie beispielsweise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – nicht divergiert, sondern konvergiert. Entsprechend veranschaulichende Abbildungen gehen die Frage vom *Ende* her an und starten mit einer Strecke endlicher Länge – dem ‚Grenzwert‘ –, die zerlegt wird (siehe etwa [Bachmann 1975, S. 148, Fig. 6]). Ein entsprechendes Beispiel ist in Abbildung 5.11 dargestellt.

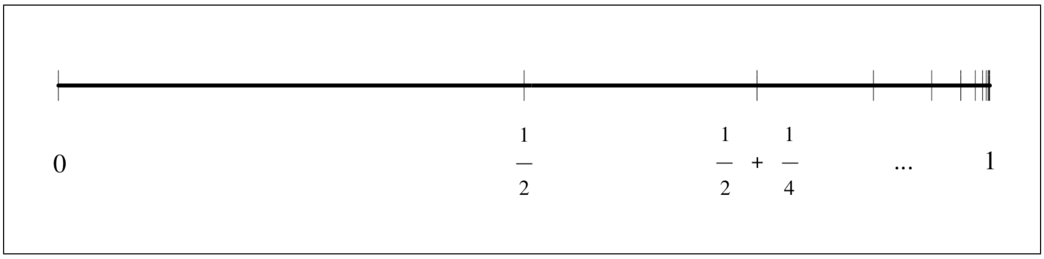

Abb. 5.11: Veranschaulichung der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Geht es nicht nur um die Konvergenz, sondern um den *Wert* konvergenter geometrischer Reihen, wird in der Regel algebraisch argumentiert. So basiert der klassische Beweis der Summenformel – von der mit dem konstanten Quotienten q ($|q| < 1$) multiplizierten Reihe wird die ursprüngliche Reihe abgezogen – auf der Eigenschaft, dass eine geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ nach der Multiplikation mit q um einen Summanden ‚verschoben‘ wird (siehe [Bachmann 1975, S. 68] und [Baierlein et al. 1993, S. 180]):

$$
\begin{array}{lr}
a + q \cdot a + q^2 \cdot a + q^3 \cdot a + q^4 \cdot a + \ldots & \quad | \cdot q \\
\phantom{a + {}} q \cdot a + q^2 \cdot a + q^3 \cdot a + q^4 \cdot a + q^5 \cdot a + \ldots &
\end{array}
$$

Wertheimer spricht einem derartigen Vorgehen zwar Eleganz zu, es sei jedoch „ein Trick in dem Sinn, daß es kein unmittelbares Verständnis dafür vermittelt, was sich strukturell abspielt“ [Wertheimer 1957, S. 255]. Der Text dieser Vorstellungsübung, der auf Wertheimer zurückgeht, leitet zu einer Vorstellung an, die das Zustandekommen des Werts solcher Reihen veranschaulicht. Damit verfolgt die Vorstellungsübung das Ziel, „Einsicht in die Natur der Reihe“ [ebd., S. 255] und letztendlich auch in die Natur der allgemeinen Summenformel $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$ zu gewähren.

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Um den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ zu berechnen, wird eine Strecke fester Länge immer wieder nach derselben Regel unterteilt, und die dadurch entstehenden Abschnitte werden – auch immer nach derselben Regel – mit zwei unterschiedlichen Farben gefärbt. Dadurch wird die Strecke zunehmend von zwei farbigen Anteilen überdeckt, die immer im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Wie in Tabelle 5.6 dargestellt, wird das Vorstellungsbild einer Strecke durch fortgesetztes Vorstellungshandeln in Form von Unterteilen und Färben bearbeitet.

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
	Zeichne eine Strecke quer vor dich hin, sagen wir
von einer Handbreit Länge.	
	Teile die Strecke in drei gleich lange Abschnitte. Färbe
den linken Abschnitt rot, den mittleren gar nicht und den rechten grün.	
Fasse nun das mittlere ungefärbte Drittel ins Auge:	
	Teile es wiederum in drei gleich lange Abschnitte und färbe auch hier den linken Abschnitt rot und den rechten grün.
Damit hast du jetzt ein Neuntel der ganzen Strecke rot und ein Neuntel grün gefärbt.	
	Verfahre immer so weiter, indem du den jeweils ungefärbten mittleren Abschnitt drittelst und die beiden äußeren Teile färbst.

Tab. 5.6: Durch „Reihe berechnen“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

Im Unterschied zu vielen anderen Vorstellungsübungen setzt dieser Text nicht mit einem Vorstellungsbild, sondern mit einer *Vorstellungshandlung* ein, die zu einem Vorstellungsbild führt, das in mehrfachen Handlungen des Teilens und Färbens *bearbeitet* wird. Die von den vorliegenden Vorstellungsanweisungen beschriebenen Vorstellungsbilder sind primär *visuell*, das Messen der Streckenlänge („eine Handbreit Länge“) allenfalls auch *taktil*.

Die mathematische Frage „Der wievielte Teil der ursprünglichen Strecke wird schließlich rot gefärbt sein?“ zielt darauf, das durch Vorstellungshandeln erzeugte Vorstellungsbild als Ganzes ins Auge zu fassen, die Länge des rot gefärbten Abschnitts mit der Länge des grün gefärbten Abschnitts zu vergleichen und als gleich lang zu erkennen.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Um den Vorstellungsanweisungen Folge leisten und die mathematische Frage beantworten zu können, können folgende singuläre Vorstellungen *produktiv* sein:

- Der mittlere Streckenabschnitt ist ein ‚Vorrat‘, von dem zwar beliebig oft, jedoch immer weniger von den Rändern ‚weggenommen‘ wird.

- Als Alternative zur Wegnahme von den Rändern kann der mittlere Streckenabschnitt hervorgehoben werden.

- Ein Hin- und Herwechseln zwischen dem Blick fürs Ganze (die Strecke) und dem Blick für den jeweils ungefärbten Abschnitt, der weiter unterteilt wird, ist eine günstige gedankliche Organisation der Vorstellungen.

- Besonders produktiv für die Beantwortung der mathematischen Frage ist die Vorstellung eines *Balanceakts*: Nach jedem Unterteilungsschritt ist der Anteil der neu rot und der neu grün gefärbten Strecke gleich groß, weshalb die beiden Farbanteile schon während des ganzen Unterteilungs- und Färbungsprozesses immer ausgeglichen sind.

- Eine weitere produktive Vorstellung ist die des gleichmäßigen *Zusammenwachsens* des rot und des grün gefärbten Abschnitts. Diese Vorstellung kann so weit gehen, dass nicht mehr der Prozess des stückweisen Ansetzens vorgestellt wird, sondern ein kontinuierliches, auf beiden Seiten gleichmäßig verlangsamtes Ausfließen von Farbe.

- Einige Schülerinnen und Schüler führen das Zeichnen bzw. Färben der Streckenabschnitte mit der Hand als *Vorstellungshandlung* aus. Auch wenn das mittlere ungefärbte Drittel ins Auge gefasst werden soll, kann diese Anweisung als gedankliche Bewegung bzw. als langsames Heranzoomen durchgeführt werden.

Zu den *hinderlichen* Vorstellungen gehören folgende:

- Die Erfahrung, dass keine Handlung – auch keine vorgestellte – unbegrenzt oft durchgeführt werden kann, kann so dominant sein, dass sich Schülerinnen und Schüler nicht auf die mathematische Fragestellung einlassen können. (Allenfalls müssten die Vorstellungsanweisungen im Konjunktiv stehen, „also wenn es denn möglich wäre, dann würde ...“).
- Bei einem allzu materialisierten Vorstellungsbild von der Strecke – etwa in Form einer Perlenkette von (noch so kleinen) Atomen oder eines Farbstrichs – wird eine Drittelung früher oder später problematisch. Selbst wenn bei einzelnen Schülerinnen und Schülern im Laufe des fortgesetzten Teilens die Vorstellungshandlung des *Heranzoomens* einsetzt, kann in Folge das Vorstellungsbild des Strichs, der die Strecke markiert, immer breiter werden – im Widerspruch zur mathematisch-regulären Auffassung von einer Geraden als Ding ohne Ausdehnung in die Breite.
- Einzelne Schülerinnen und Schüler geraten mit den festen Vorgaben der Farben „Rot“ und „Grün“ in Konflikt. Für sie sind die Farben für den linken und den rechten Abschnitt nicht frei wählbar, sondern bereits durch ihre Lage vorgegeben – etwa „Hellgrün“ für „links“ und „Dunkelviolett“ für „rechts“. Synästhetiker wie sie wären also besser bedient, würde in den Vorstellungsanweisungen auf konkrete Farbangaben verzichtet.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Das mathematikdidaktische Potenzial dieser Vorstellungsübung bewegt sich in den Bereichen des Argumentierens, Verallgemeinerns und Beweisens.

Diskutieren der unbegrenzt häufigen Durchführung von Handlungen: Diese Vorstellungsübung zielt in ihrer Anlage auf die Ausgeglichenheit der roten und der grünen Färbung. Obwohl der mittlere ungefärbte Abschnitt nie aufgebraucht sein wird, liefert er nach jedem Unterteilungsschritt einen gleich großen Anteil für die linke (rote) Färbung wie für die rechte (grüne) Färbung. Damit werden die Abschnitte, die für die geometrische Reihe stehen, ‚schließlich‘ die *Hälfte* der Strecke bedecken.

Der Teufel steckt allerdings im Detail, in der Futurform „werden“: Diese Vorstellungsübung kann Streitgespräche über den Anspruch auslösen, eine Handlung unbegrenzt oft ausführen zu können. Er steht – ganz egal, ob es sich um eine konkrete Handlung oder eine Vorstellungshandlung handelt – im Widerspruch zur alltäglichen Erfahrung der Endlichkeit. In der Vorstellungsübung wird ein typisch mathematischer (Aus-)Weg begangen, der darin besteht, sich nicht auf die zugrunde liegende Problematik einzulassen, sondern sie geschickt zu umschiffen. Wie schon in der Veranschaulichung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ wird von einer Strecke endlicher Länge und damit vom *Grenzwert* her argumentiert. Es geht also nicht so sehr darum, unendlich oft Vorstellungshandlungen auszuführen, es geht vielmehr darum, sie gedanklich einzuholen (ja zu überholen!), um ihre Tendenz zu erfassen (siehe auch die Diskussion um die Gleichung $0{,}\overline{9} = 1$ in Tab. 4.2, S. 116).[55]

Verallgemeinern und Beweisen: In einem weiteren Schritt kann die Strecke in vier gleich lange Abschnitte geteilt werden. Der Abschnitt links soll rot, der zweite gar nicht und die letzten beiden sollen grün gefärbt werden. Damit wird ‚zu guter Letzt' der dritte Teil der ganzen Strecke rot sein, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$ gilt. (In diesem Fall muss die produktive Vorstellung des Balanceakts modifiziert werden, da nun immer doppelt so viele Streckenanteile grün sind wie rot.)

Mit der gleichen Argumentationsstrategie lässt sich schließlich eine *allgemeine* Summenformel konvergenter geometrischer Reihen plausibel machen: Ausgehend von einer Strecke der Länge 1 wird bei jedem neuen Schnitt das rechte (an die bestehende Teilsumme anschließende) Intervall in b Teile zerlegt. Der erste linke Teil wird zur bestehenden Teilsumme (rot) gezählt, der zweite für den nächsten Schnitt ins Auge gefasst, und die rechts von diesem Teil liegenden $b-2$ Teile werden zur Restsumme (grün) gezählt. Damit verhalten sich die Länge der Teilsumme (rot) und die Länge der Restsumme (grün) wie $1 : (b-2)$. Während mit jedem weiteren Zerlegungsschritt das ungefärbte Intervall kürzer wird, wachsen Teilsumme (rot) und Restsumme (grün) einander entgegen, immer im Verhältnis $1 : (b-2)$ stehend. Mit anderen Worten ist die *ganze* Strecke letztendlich rot und grün eingefärbt, wobei die Länge des roten Abschnitts $(b-2)$-mal in der Länge des grünen Abschnitt enthalten ist. Das heißt aber auch, dass die (rote) Teilsumme $1+(b-2) = (b-1)$-mal in der ganzen Strecke (rot + grün) enthalten ist. In die mathematische Sprache formaler Beziehungen übersetzt ergibt sich folgender Ausdruck:

[55] Damit werden auch Probleme umgangen, die schon von griechischen Philosophen formuliert worden sind, zum Beispiel das Paradoxon vom athletisch laufenden Achilles und der mit Vorsprung gestarteten Schildkröte. Dieses Paradoxon gewinnt seine Brisanz aus der plausiblen Extrapolation alltäglicher Erfahrung, die davon ausgeht, dass eine unbegrenzt oft durchgeführte Handlung zwangsläufig auch unbegrenzt viel Zeit ausschöpft.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^3} + \ldots + \frac{1}{b^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{b-1} \quad (b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}).$$[56]

Mit $b := \frac{1}{q}$ ($|q| < 1$) folgt daraus die klassische Summenformel konvergenter geometrischer Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

5.2.4.2 Analyse der Vorstellungsübung „ebenes Dreieck begehen"

Der Satz über die Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck wird im Schulzusammenhang üblicherweise wie folgt illustriert: Die drei Ecken eines Dreiecks aus Papier werden abgerissen und nebeneinandergelegt, oder aber zwei Kopien des Dreiecks werden um einen Seitenmittelpunkt gedreht werden (zum entsprechenden operativen Beweis nach Wittmann siehe S. 87). Beide Varianten veranschaulichen zwar den klassischen Beweis, der seit Euklid mit Hilfe des Parallelenaxioms und des Satzes über Wechselwinkel an Parallelen geführt wird. Es wird dadurch aber kaum einsehbar, dass die Winkelsumme in jedem ebenen Dreieck *exakt* 180° groß ist und dass im Fall eines Vielecks für jeden zusätzlichen Eckpunkt *weitere* 180° dazukommen.[57]

Durch den Text intendierte Vorstellungen

In dieser Vorstellungsübung werden die Innenwinkel nicht als statische Größen interpretiert oder gedrehte Kopien des originalen Dreiecks geschickt nebeneinandergelegt. Vielmehr werden hier die drei Innenwinkel als *Drehwinkel* gedeutet. Die Vorstellungsübung leitet dazu an, längs der Kanten eines großen Dreiecks zu gehen (Änderung des Orts), sich in den Eckpunkten jeweils um die Größe des dortigen Innenwinkels im immer gleichen Drehsinn zu drehen (Änderung der Richtung), die Drehung entlang der nächsten Dreieckskante zu transportieren und mit dem Innenwinkel in der nächsten Dreiecksecke zusammenzufügen. Für eine graphische Darstellung dieses Prozesses siehe Abbildung 5.12 [Weber 2005, S. 30].[58]

[56] Im Gegensatz zu $b > 1$ ist die Bedingung $b \in \mathbb{N}$ *nicht* grundsätzlicher Natur.

[57] Siehe § 32 im ersten Buch von Euklids *Elementen* [Euklid 1973, S. 23] oder im *Handbuch der Schulmathematik* [Wolff 1962, S. 44].

[58] Bereits Autoren wie [Wertheimer 1957, S. 172–184], [Wittenberg 1963, S. 109–117], [Schuberth 1984], [Peters 1985] und [Eschenburg 1998] schlagen als Plausibilitätsargument vor, sich in den Eckpunkten zu drehen, allerdings um den jeweiligen *Außen*winkel. Den Gymnasiastinnen und Gymnasiasten ist der Ansatz verständlich durch frühere Erfahrungen mit Drehen und Verschieben geometrischer Objekte, etwa im Zusammenhang mit dem Kongruenzbegriff.

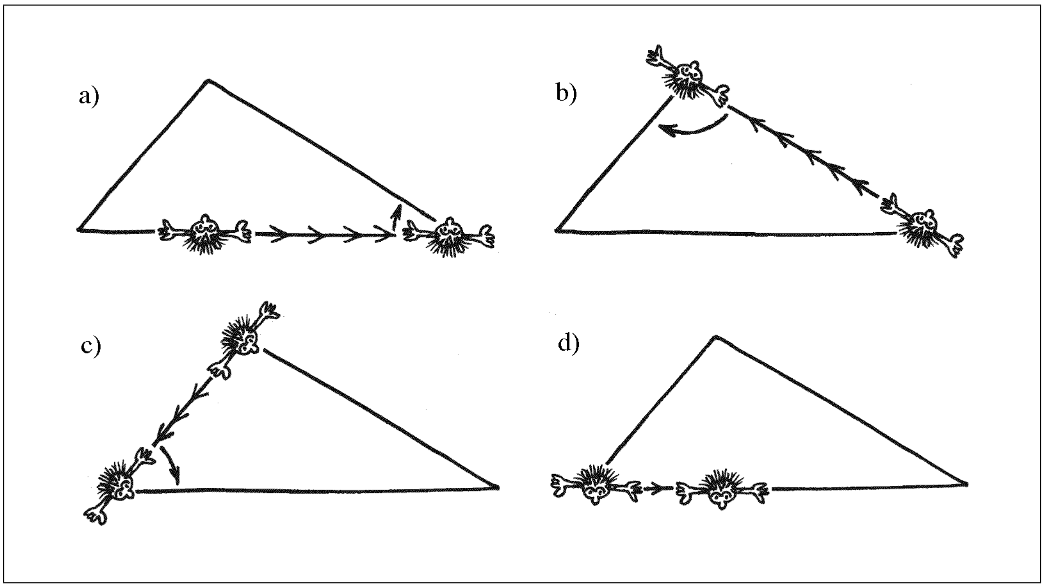

Abb. 5.12: Rundlauf entlang der Kanten eines ebenen Dreiecks

Im Gegensatz zu verwandten Argumentationsweisen, in denen das Dreieck vor- und rückwärts begangen wird, findet hier die Begehung *seitwärts* statt. Diese kleine Unnatürlichkeit hat den Vorteil, dass in jedem Eckpunkt nicht um den Außenwinkel, sondern um den Innenwinkel gedreht werden kann. Folglich führen hier verschiedene Vorstellungshandlungen zu einer halben Volldrehung des eigenen Körpers. In Ergänzung dazu ergibt die nachträgliche Analyse der Begehung, dass in den drei Eckpunkten jeweils in dieselbe Richtung und damit insgesamt um die Summe aller drei Innenwinkel gedreht wurde.[59]

Die Vorstellungsanweisungen in Tabelle 5.7 sind in ihrem Fokus auf das Gehen und Drehen fast ausschließlich Vorstellungshandlungen in Form gedanklicher *Bewegungen.* Sie leiten nicht zur Bearbeitung eines mathematischen Objekts an, sondern auch dazu, eine mathematische Tatsache durch Bewegung ‚am eigenen Körper' zu erfahren. Damit sind auch die Größenmaßstäbe der hier intendierten Vorstellungen größer als in den meisten anderen Vorstellungsübungen.

Entsprechend wird der Aufbau einer Reihe von *visuellen* Vorstellungen angeregt, die zur Kontrolle der Vorstellungshandlungen dienen. Weil die Übung den ganzen Körper erfasst und zu einer Bewegung anleitet, können Vorstellun-

[59] Diese Vorstellungsübung wurde in [Fauser 2003, S. 262 f.] als Beispiel für „imaginatives Lernen" im Mathematikunterricht erstmals publiziert.

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
	Stell dir vor, wie du auf einer Wiese gehst.
Da siehst du vor dir drei Stoffstreifen liegen, die die Kanten eines großen Dreiecks bilden.	
	Stell dich so mit deinen Füßen mitten auf einen Streifen,
dass das Dreieck vor dir liegt,	
	und strecke deine Arme seitwärts nach rechts und links aus:
Sie liegen über einem Streifen – das heißt einer Kante – des Dreiecks.	
	Bewege dich nun seitwärts, Fuß neben Fuß setzend, auf deinem Streifen in Richtung des rechten Arms, bis du an eine Ecke kommst,
wo zwei Stoffstreifen zusammenlaufen.	
Jetzt ragt der rechte Arm über die Figur hinaus, und der linke liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks.	
	Dreh dich langsam, mit starr ausgestreckten Armen, um deine Längsachse so,
dass der linke Arm zuerst in das Innere der Figur hineinzeigt, so lange, bis er über dem nächsten Stoffstreifen des Dreiecks zu liegen kommt.	
	In Richtung dieses Arms bewegst du dich wieder, Fuß neben Fuß setzend,
bis zur zweiten Ecke. Jetzt ragt der linke Arm über das Dreieck hinaus, und der rechte liegt über der eben begangenen Kante des Dreiecks.	
	Dreh dich wieder langsam so,
dass der rechte Arm zuerst in das Dreieck hineinzeigt, bis er über der nächsten Kante zu liegen kommt.	
	Geh auf diese Art weiter, bis du an den Ausgangspunkt zurückkommst.

Tab. 5.7: Durch „ebenes Dreieck begehen“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

gen entstehen, die den *Muskelsinn* ansprechen. Ganz zu Beginn ist denkbar, dass die nackten Füße auf der Wiese von einer *taktilen* Vorstellung begleitet sind.

Die Schlussfrage „Wie stehst du jetzt?“ regt dazu an, die Anfangs- und Endblickrichtung des Körpers miteinander zu vergleichen. Zu Beginn blickt der oder die Vorstellende in das Innere des Dreiecks hinein, nach dem Rundlauf aus dem Dreieck hinaus (siehe Abb. 5.12). Die Frage „Was ist passiert?“ soll die Vorstellenden dazu auffordern, sich den Prozess des ganzen Rundlaufs zu vergegenwärtigen und zu bemerken, dass entlang der Kanten keine Drehung, in den Eckpunkten jedoch gleichsinnig orientierte Drehungen um den jeweiligen Innenwinkel stattfinden. Die Kombination beider Beobachtungen begründet den Innenwinkelsatz ebener Dreiecke.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Folgende singuläre Vorstellungen können beim Befolgen der Anweisungen und beim Beantworten der Fragen *produktiv* sein:

- Zur Beantwortung der Frage kann ein *Perspektivenwechsel* nützlich sein. Im Text dieser Vorstellungsübung werden verschiedene Betrachtungsweisen des Dreiecks angeleitet, die sich jedoch immer auf die Perspektive des oder der Vorstellenden beschränken. Zur Beantwortung der mathematischen Frage kann es deshalb vorteilhaft sein, sich in einer Art Gesamtschau das Dreieck und die eigene Gestalt *von oben* vorzustellen.

- Es ist grundsätzlich nützlich, die *Größenmaßstäbe* flexibel zu handhaben. Während das Dreieck zum vorgestellten Begehen um einiges größer sein muss als der eigene Körper, wird es (wie der eigene Körper) bei der Aufsicht schrumpfen, um als Ganzes in den Blick genommen werden zu können.

- Damit einher geht auch ein *Rollenwechsel*: Während der Bewegung und der Drehung befinden sich die Vorstellenden *innerhalb* ihres vorgestellten Körpers, besonders auch bei dem Vergleich der End- mit der Anfangsposition. Zur Analyse der Situation betrachten sie ihren vorgestellten Körper von *außen*.

- Da das Dreieck aus dem Schulzimmer hinaus auf eine Wiese verlegt wird, werden auch produktive Vorstellungen ganz anderer Art möglich. So kann warmer Sonnenschein oder feuchtes Gras vorgestellt werden – eher taktile Vorstellungen, die ein angenehmes Ambiente schaffen.

Auch hier können die Anweisungen zum Aufbau von *hinderlichen* Vorstellungen führen:

- Durch den außermathematischen Sach- und Handlungszusammenhang des Stoffstreifens auf einer Wiese konstruieren einige Schülerinnen und Schüler Vorstellungshandlungen wie das Weggehen vom Streifen oder das Vorstellungsbild eines sphärischen Dreiecks.
- Andere Schülerinnen und Schüler berichten, sie hätten die in den Dreiecksecken vorgenommenen Drehungen nicht oder nur schlecht kontrollieren können. Einige geraten sogar in eine Art Wirbel.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Diese Vorstellungsübung ermöglicht in der Phase der Besprechung Prozesse wie mathematisches Argumentieren und Verallgemeinern.

Argumentieren, dass sich die halbe Volldrehung aus den Innenwinkeln zusammensetzt:

- Zur Argumentation, dass sich die halbe Volldrehung aus den Einzeldrehungen in den Eckpunkten des Dreiecks zusammensetzt, muss verifiziert werden, dass sich die Drehungen nicht gegenseitig neutralisieren, sondern immer gleichsinnig vorgenommen werden.
- Durch die Anlage dieser Vorstellungsübung gilt der Innenwinkelsatz nicht nur für das jeweilige Dreieck, sondern für alle möglichen vorstellbaren ebenen Dreiecke. Folglich beträgt die Innenwinkelsumme von Dreiecken nicht einfach ungefähr 180°. Sie ‚rastet' vielmehr durch das Alternieren der Sicht und Nichtsicht auf das Dreieck bei exakt 180° ein.

Verallgemeinern im Hinblick auf ebene Polygone und auf sphärische Dreiecke:

- Wie bereits erwähnt kann das hier verwendete Plausibilitätsargument auch auf konvexe Vierecke, Fünfecke usw. angewendet werden. Da pro zusätzliche Ecke die Sichtrichtung ein *weiteres Mal* alterniert wird, vergrößert sich der gesamte Drehwinkel pro Ecke um weitere 180°. Ausgehend vom Dreieck mit einer totalen Drehung von 180° ergibt sich folglich für die Summe aller Innenwinkel im ebenen n-Eck $(n-2)\cdot 180°$ $(n \geq 3)$.

- Das beschriebene Verfahren kann auch auf einspringende Eckpunkte übertragen werden, womit sich auch die Innenwinkelsumme von *konkaven* Polygonen bestimmen lässt.
- Die Vorstellungsübung verschleiert, dass ihr Plausibilitätsargument nur in der Ebene zulässig ist, denn nur in der *ebenen Geometrie* ist die Unabhängigkeit von Ort und Richtung gegeben: Durch das Geradeausgehen verändert sich der Ort, nicht aber die Richtung. Deshalb kann ein Innenwinkel (in Form einer Drehung) durch Geradeausgehen zur nächsten Ecke transportiert und an den dortigen Innenwinkel angesetzt werden.
  Wird dieses Argument auf ein *sphärisches* Dreieck übertragen, entsteht Unsinn. Der Grund liegt darin, dass auf gekrümmten Flächen Winkel an verschiedenen Orten in unterschiedlichen Ebenen liegen, also Ort und Richtung *nicht* voneinander unabhängig sind. Die an verschiedenen Orten befindlichen Innenwinkel eines Dreiecks können nicht bedenkenlos verschoben und zusammengefügt werden.[60]

Das Parallelenaxiom ist mit anderen Worten eine notwendige Voraussetzung für die Zulässigkeit des in der Vorstellungsübung verwendeten Vorgehens.[61]

5.2.5 Analyse der Vorstellungsübungen vom Typ „Paradoxon“

Vorstellungsübungen vom Typ „Paradoxon“ leiten dazu an, sich ein außermathematisches Umfeld, das im Alltag nicht erfahrbar ist, bildlich vorzustellen und darin gedanklich zu handeln. Insofern haben sie den Charakter von *Gedankenexperimenten.* In den beiden Beispielen „Hilberts Hotel“ und „Geschlossenes oder offenes Universum?“ werden alltägliche Erfahrungen mit mathematischen Kenntnissen in Widerspruch gebracht. Um dies zu erreichen, wird im Fall des offenen bzw. geschlossenen Universums Analogiebildung (in zunehmend höheren Dimensionen) eingesetzt. Die mathematische Frage zum Schluss der Vorstellungsanweisungen hat die Funktion, den Widerspruch unausweichlich zu machen, einen *kognitiven Konflikt* anzuregen und damit das

[60] Präziser: Richtungsvektoren liegen in Tangentialflächen, die im Fall gekrümmter Flächen an verschiedenen Orten nicht parallel zueinander liegen. Die Richtung eines Vektors bleibt bei dessen Ortsveränderung durch Parallelverschiebung *nicht* erhalten, sondern ändert sich, und zwar in Abhängigkeit von der Krümmung der Fläche. ([Eschenburg 1998, S. 52], [Arnold 1988, S. 305–310])

[61] Für eine Vorstellungsübung zum Begehen eines *sphärischen* Dreiecks siehe [Weber 2005].

Feld für eigene Erkundungen und Experimente zu öffnen. Damit können die Vorstellenden ihren Erfahrungsbereich erweitern und ihre Vorstellungen umstrukturieren.

In den beiden folgenden Analysen in den Abschnitten 5.2.5.1 und 5.2.5.2 werden beteiligte Vorstellungsprozesse in der Phase der Vorstellungen und mögliche mathematische Prozesse in der Phase der Besprechung erläutert.

5.2.5.1 Analyse der Vorstellungsübung „Hilberts Hotel"

In der Geometrie tritt der Begriff der Unendlichkeit in Zusammenhang mit Parallelen auf, die sich im Endlichen nicht schneiden. In der Analysis hat der Begriff des Unendlichen die Bedeutung des Potentiell-Unendlichen. So steht $n \to \infty$ für den *Prozess*, in dem n über alle (endliche) Maßen wächst.

In dieser Vorstellungsübung geht es um den Begriff der Unendlichkeit im Kontext der Mengenlehre.[62] Weil jeder natürlichen Zahl eine Menge dieser Mächtigkeit zugeordnet wird, erhält das Zahlenverständnis eine mögliche axiomatische Fundierung. Da es Mengen mit mehr als endlich vielen Elementen gibt, kann der Begriff der Unendlichkeit entsprechend gedeutet werden – und es wird sogar möglich, mit diesem Aktual-Unendlichen rechnerisch umzugehen. Was passiert bei der Addition einer (endlichen) Zahl, was bei der Multiplikation mit einer (endlichen) Zahl?

Durch den Text intendierte Vorstellungen

Aufgrund unserer alltäglichen Erfahrungen kann ein Hotel mit seinen endlich vielen Zimmern keine Gäste mehr aufnehmen, wenn jedes Zimmer schon von einem Gast belegt ist. Diese Vorstellungsübung setzt ein mit dem Vorstellungsbild eines Hotels, in welchem unbegrenzt viele Zimmer zur Verfügung stehen. Durch den Bezug auf diese Alltagserfahrung geraten die Vorstellenden in eine paradoxe Situation. Sie wird durch die folgenden Vorstellungsanweisungen aufgelöst, die erläutern, dass für jede endliche Anzahl neuer Gäste Platz geschaffen werden kann, indem die bereits einquartierten Gäste verschoben werden. Am Ende des Texts wird gefragt, wie sogar abzählbar unendlich viele Gäste zusätzlich untergebracht werden können. Mit anderen Worten

[62] Diese Vorstellungsübung ist von der Erzählung „Das Hilbertsche Hotel" [Wille 1984] inspiriert. Zum Thema dieser Vorstellungsübung hat die BBC den Film „Hotel Hilbert" (GB 1996) produziert, der 1998 am *International Congress of Mathematicians* in Berlin gezeigt wurde (siehe `http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/Events/VideoMath/longVideos/Hotel.html`).

möchte diese Übung dazu anregen, Vorstellungen zum Aktual-Unendlichen aufzubauen, um darin gedanklich operieren zu können.[63]

Wie in Tabelle 5.2.5.1 dargestellt, zielen die Vorstellungsanweisungen auf das *visuelle Vorstellungsbild* eines Hotels mit unendlich vielen Zimmern und – im letzten Teil – auf das Vorstellungsbild von unendlich vielen neuen Gästen. Die beiden ersten paradoxen Situationen werden durch *Vorstellungshandlungen* in Form des Umquartierens oder Verschiebens aller bereits einquartierten Gäste aufgelöst.

Durch die nach dem dritten Teil gestellte mathematische Frage „Wie kannst du diese unendlich vielen neuen Gäste im Hotel unterbringen?" wird eine noch paradoxere Situation geschaffen, da selbst das eben kennengelernte Umzugs-Verfahren nicht weiterführt. Sie stellt eine besondere Belastungsprobe für die in der Vorstellungsübung entwickelten Vorstellungen dar.[64]

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Auch wenn die folgenden *produktiven* Vorstellungen nicht angeleitet werden, können sie von den Schülerinnen und Schülern konstruiert werden:

- Es ist günstig, sich in den Nachtportier hineinzuversetzen, um sich die Neuankömmlinge zu vergegenwärtigen und um sich dem Problem zu stellen. Allerdings muss diese Perspektive auch wieder verlassen werden, um das Problem verstehen und bearbeiten zu können.
- Die Zimmer sind – vielmehr als die Gäste – ein tragendes Element der Vorstellungsübung. Ihre unendliche Anzahl in Hilberts Hotel kann durch das Vorstellungsbild einer Zimmerflucht eingefangen werden, die sich nach hinten perspektivisch verengt und in die man hineinschaut. In diesem Bild kann der Umzug der alten Gäste als ein Wegschieben (hinein in die ‚geometrische Unendlichkeit' des Fluchtpunkts) vorgestellt werden, wodurch im vorderen Bereich des Bildes Platz für die endlich vielen Neuankömmlinge entsteht.
- Da durch die Zimmernummer jedem Gast genau eine natürliche Zahl zugeordnet ist, kann für das Hotel das Vorstellungsbild eines Bandes

[63] Da das Verfahren zur Beantwortung der Schlussfrage nicht aus den Vorstellungsanweisungen hervorgeht, geht es im letzten Teil dieser Vorstellungsübung auch um Problemlösen. Weil aber die *Paradoxie* im Vordergrund steht, wird die vorliegende Vorstellungsübung diesem Typus zugeordnet.

[64] Da die Gäste einzelne Individuen sind, werden die Schülerinnen und Schüler voraussichtlich von *abzählbar* unendlich vielen Gästen ausgehen.

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
Stell dir ein riesiges Hotel vor: Es hat unendlich viele Einzelzimmer, die mit den Zimmernummern 1, 2, 3, ... durchnummeriert sind.	
Stell dir weiter vor, du arbeitest als Nachtportier in diesem Hotel.	
Eines Nachts sind unendlich viele Gäste im Hotel einquartiert. Du stellst dich also auf eine ruhige Nacht ein und	
	legst dich schlafen.
Da erscheint ein Gast an der Hotelrezeption, weckt dich und verlangt ein Einzelzimmer.	
„Tut mir leid", sagst du, „wir sind leider komplett ausgebucht."	
„Das kann nicht sein", sagt der Gast. „Sie haben doch unendlich viele Zimmer, also muss noch ein leeres für mich da sein!"	
„Tut mir wirklich sehr leid", sagst du, „aber es sind schon unendlich viele Gäste einquartiert, also ist kein einziges Zimmer mehr frei."	
Der Gast entgegnet hartnäckig: „Das glaube ich nicht. Ich möchte sofort die Hoteldirektorin sprechen!"	
	Du holst also die Hoteldirektorin.
Sie hört sich die Klage des neuen Gastes gelassen an und meint dann zu dir: „Dieses Problem lässt sich lösen –	
	wir tauschen einfach ein bisschen die Zimmer: Du schickst den Gast von Nummer 1 nach Nummer 2, den Gast von Nummer 2 nach Nummer 3, den wieder nach Nummer 4 usw. – also jeder bis-

	herige Gast zieht in das Zimmer mit der nächstfolgenden Zimmernummer.
Auf diese Weise wird Zimmer 1 frei, und unser neuer Gast kann untergebracht werden.“	
Gesagt, getan. Und da es sich um ein mathematisches Hotel handelt, geht alles blitzschnell und ohne Beschwerden von Gästen, die nachts geweckt werden und umziehen müssen.	
	Zufrieden legst du dich wieder hin.
Etwas später wirst du wieder geweckt: Ein Bus mit hundert Personen ist angekommen, die alle unbedingt ein Bett in einem Einzelzimmer möchten. Du bist ratlos und	
	läufst wieder zur Hoteldirektorin.
Die sagt: „Auch diese Gäste können untergebracht werden.	
	Schicke dieses Mal den Gast von Nummer 1 nach Nummer 101, den von Nummer 2 nach Nummer 102 usw. – also jeder Gast wird hundert Zimmer weiter einquartiert.“
Und wieder sind in kürzester Zeit alle alten Gäste umgezogen und die Neuankömmlinge in den ersten hundert geräumten Zimmern untergebracht.	
Aber noch einmal wird deine Ruhe in dieser Nacht gestört. Denn wieder eine halbe Stunde später – es ist schon weit nach Mitternacht – strömt eine riesige, unüberschaubare Menschenmenge in die Empfangshalle des Hotels, und ihr Reiseleiter wünscht, dass du seine Reisende in Einzelzimmern unterbringst.	
Du fragst: „Wie viele Personen sind es denn?“	
„Unendlich viele“, sagt der Reiseleiter.	

Tab. 5.8: Durch „Hilberts Hotel“ intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

konstruiert werden, das quer (etwa von links nach rechts) verläuft und worauf Zahlen markiert sind. In diesem Vorstellungsbild eines quer sich erstreckenden Zahlenbandes können die beiden ersten Umziehaktionen als gedankliche Bewegung (gleichzeitiges Verschieben aller alten Gäste, angewiesen durch eine Lautsprecherdurchsage „Jetzt bitte umziehen!") nach rechts gedeutet werden. Im Gegensatz zum Bild der Zimmerflucht, das stark die Perspektive des Nachtportiers wiedergibt, liegt hier der Fokus weniger auf dem neu geschaffenen Platz als vielmehr auf dem Prozess des Umziehens als einem Ganzen.

- Für die Beantwortung der mathematischen Frage „Wie kannst du diese unendlich vielen neuen Gäste im Hotel unterbringen?" kann es günstig sein, das Vorstellungsbild weiter umzubauen. So lässt sich der ursprünglich nur einseitig bewohnten Zimmerflucht eine Serie von gegenüberliegenden Zimmern beigesellen, die für die Neuankömmlinge bereitstehen. Entsprechend werden die alten Gäste in Zimmer mit doppelt so großen Nummern umquartiert, die Neuankömmlinge erhalten ihr Nachtasyl also in den Zimmern mit ungeraden Nummern. Einzelne Schülerinnen und Schüler sprechen vom Bild des Reißverschlusses, weil sich die von alten und neuen Gästen belegten Zimmer ineinander ‚verzahnen'.)

Hinderliche Vorstellungen treten bei jeder Vorstellungsübung vom Typ „Paradoxon" in ganz besonderer Weise auf, da sie ja einen Konflikt verschiedener Erfahrungsbereiche und Vorstellungen intendiert:

- Wird das Hotel mit verschiedenen Gängen und mehreren Etagen vorgestellt, ist es noch komplizierter, sich den Prozess des Umziehens vorzustellen.

- Eine ganze Gruppe hinderlicher Vorstellungen dreht sich um den Umzug der alten Gäste. So kann Gast Nummer 1 bei seinem Umzug in Zimmer 2 mit dem Gast Nummer 2 zusammenstoßen (und in Folge alle anderen Gäste).

- Wenn versucht wird, die Empfangshalle des Hotels so zu vergrößern, dass sie auch die letzte Gruppe von Neuankömmlingen aufnehmen könnte, so geht die Aufmerksamkeit von der unendlich großen Anzahl auf die unendliche großen Dimensionen der Halle über und wird damit abgelenkt. (Es ist produktiver, wenn man sich vorstellt, dass ein endlicher Teil der Gruppe dicht gedrängt in der Halle steht, während der andere, unendliche Teil draußen vor dem Eingang wartet.)

- Vorstellungen wie die, dass ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern durch die Einquartierung von abzählbar unendlich vielen Gästen ausgebucht ist, entstammen der Welt des Endlichen und prägen damit unsere Intuition. Sie machen die Vorstellungsübung zum Paradoxon. Auch die Vorstellung des Schiebens, die zur Unterbringung endlich vieler Neuankömmlinge durchaus produktiv ist, erweist sich bei unendlich vielen Neuankömmlingen als hinderlich.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Neben der Klärung des Begriffs der Unendlichkeit ermöglicht diese Vorstellungsübung mathematische Prozesse wie Argumentieren und Verallgemeinern.

Argumentieren: Weil die Menge der Gäste mit der Menge der natürlichen Zahlen in eine eineindeutige Beziehung gesetzt wird, sind für diese abzählbar unendliche Menge Rechengesetze wie $x + 1 \neq x$ außer Kraft gesetzt. Ihre Eigenschaften unterscheiden sich von Mengen endlicher Mächtigkeit in vielerlei Hinsicht.

Verallgemeinerung im Hinblick auf unendlich viele neue Gäste: Aufbauend auf den in dieser Übung konstruierten Vorstellungen können weitere Fragen gestellt und untersucht werden:

- Wie können (abzählbar) unendlich viele Busse mit je (abzählbar) unendlich vielen Personen in Hilberts Hotel untergebracht werden?[65]
- Wie müssten die ersten Gäste auf die Zimmer verteilt werden, damit sie nicht umzuziehen brauchten und gleichzeitig im Laufe der Nacht – egal ob endlich oder (abzählbar) unendlich viele – neue Gäste einquartiert werden könnten?
- Wie sähe die Situation aus, wenn *überabzählbar* viele neue Gäste in Hilberts Hotel übernachten wollten?[66]

Diese Fragen lassen sich auch im Rahmen von weiteren Vorstellungsübungen anregen und bearbeiten.

[65] Eine Methode liefert Cantors Diagonalverfahren. Bei einer anderen Methode – bei der sogar noch (abzählbar) unendlich viele Zimmer frei bleiben – werden die alten Gäste in Zimmer mit den Nummern von Zweierpotenzen geschickt und die neuen Gäste aus Bus m in Zimmer, deren Nummern gleich den Potenzen der m-ten Primzahl sind.
[66] Eine entsprechende Erzählung findet sich in [Wille 1984, S. 37 ff.].

5.2.5.2 Analyse der Vorstellungsübung „Geschlossenes oder offenes Universum?“

Diese Vorstellungsübung zielt auf die Frage, ob die geometrische Struktur der uns umgebenden Welt nicht auch völlig anders aussehen könnte, als wir üblicherweise annehmen: Wie unsere Vorfahren auf einer ebenen Scheibe zu leben glaubten, gehen wir aufgrund unserer lokalen Perspektive und Erfahrung davon aus, dass das uns umgebende dreidimensionale Universum global ungekrümmt ist und infolgedessen unendlich ausgedehnt, eine offene Weite ist. In dieser Vorstellungsübung wird Dimension für Dimension untersucht, welche Konsequenzen die Offen- bzw. Geschlossenheit des jeweiligen Universums für ‚Geradeaus'-Bewegungen hat. Die Vorstellungsübung gipfelt in der geometrisch nicht auszuschließenden Möglichkeit, dass unser Universum geschlossen sein könnte – und damit einer der leuchtenden Punkte am nächtlichen Firmament die Sonne wäre.

Durch den Text intendierte Vorstellungen

In der eindimensionalen Welt eines riesigen Seils, dessen Enden offen ($\mathbb{R}^1$) bzw. miteinander verbunden sind ($\mathbb{S}^1$) werden die Bewegungsmöglichkeiten ausgetestet. Die Vorstellungsanweisungen regen dazu an, in der beschriebenen Welt eine ‚Geradeaus'-Bewegung auszuführen und fragen danach, ob es möglich ist, wieder an den Ausgangspunkt der Bewegung zurückzukommen. Im zweiten und dritten Teil des Texts werden die analogen, höherdimensionalen offenen bzw. geschlossenen Welten $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{S}^3$ auf dieselbe Frage hin untersucht. Mit anderen Worten sollen die Vorstellungsbilder ganz unterschiedlicher Welten durch die Vorstellungshandlung von ‚Geradeaus'-Bewegungen erkundet und damit vertrauter werden.[67]

Der Text dieser Vorstellungsübung ist in allen drei Teilen analog angelegt (siehe Tab. 5.9): Ausgehend vom *Vorstellungsbild* einer lokal ein-, zwei- bzw. dreidimensionalen Welt wird eine ‚Geradeaus'-Bewegung in die Wege geleitet. Durch die *Vorstellungshandlung* wird das Vorstellungsbild weniger bearbeitet als vielmehr exploriert. Dadurch sollen Vorstellungen konstruiert werden, die die jeweilige Welt nicht nur lokal, sondern so global wie möglich erfassen. Für die dreidimensionale Welt ist dies eine echte Herausforderung.

[67] $\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ bezeichnet den Rand einer $n+1$-dimensionalen Vollkugel und wird *n-Sphäre* genannt. Dabei handelt es sich um eine n-Mannigfaltigkeit (das heißt $\mathbb{S}^n$ sieht lokal wie $\mathbb{R}^n$ aus), die geschlossen ist (sich also nicht ins Unendliche ausdehnt).

Vorstellungsbilder	**Vorstellungshandlungen**
Stell dir vor, dass deine Welt diejenige einer Geraden ist. Du lebst – wie eine Raupe – auf einem sehr langen, straff gespannten Seil.	
	Du hast auf deinem Seil nur wenig Bewegungsmöglichkeiten: Bewege dich auf dem Seil ein bisschen vorwärts und bewege dich ein bisschen rückwärts.
Stell dir zusätzlich vor, dass das Seil unendlich lang ist.	
	Beginne, dich in eine der beiden Richtungen zu bewegen, immer weiter –
garantiert kommst du nie mehr zum Ausgangspunkt zurück.	
Stell dir jetzt vor, dass dein Seil nicht unendlich lang ist, sondern einfach sehr lang ist. Es schließt sich zu einem riesigen Kreis.	
	Beginne, in eine der beiden Richtungen zu kriechen.
Stell dir nun vor, du bist ein Lebewesen, das in einer Fläche wohnt – ähnlich einem Schatten:	
	Bewege dich in deiner flachen Welt zuerst ein paar Schritte vorwärts und ein paar Schritte rückwärts, dann ein paar Schritte nach links und ein paar Schritte nach rechts.
Stell dir zusätzlich vor, dass deine Fläche unbegrenzt groß ist und aus einer unendlich großen Ebene besteht.	
	Beginne, dich in deiner flachen Welt in eine feste Richtung geradeaus fortzubewegen, immer weiter, immer weiter –
du kehrst gewiss nie mehr zum Ausgangspunkt zurück.	

Stell dir jetzt vor, dass deine Fläche zwar groß ist, sich aber zu einer riesigen Kugel-Oberfläche schließt.	
	Bewege dich in eine feste Richtung deiner Kugeloberflächen-Welt fort, immer und immer weiter.
Du und ich, wir leben in einem Universum, in dem wir uns nicht nur vorwärts bzw. rückwärts und unabhängig davon nach links bzw. rechts bewegen können, sondern zusätzlich nach oben bzw. unten.	
Üblicherweise gehen wir davon aus, dass unser Universum unbegrenzt groß ist:	
	Stell dir vor, du startest mit einem Raumschiff von der Erde aus hinaus ins Weltall. Du fliegst immer kerzengerade von der Erde weg.
Dann kommst du nie mehr zur Erde zurück.	
Jetzt stell dir zum Schluss vor, dass unser Universum ‚geschlossen' ist, so wie schon das zum Kreis gekrümmte Seil bzw. die zur Kugeloberfläche gebogene Fläche auch geschlossen war.	
	Fliege nun ins Weltall hinaus, immer kerzengerade mit festem Kurs, immer weiter.

Tab. 5.9: Durch „geschlossenes oder offenes Universum" intendierte Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

Alle drei Teile werden mit mathematischen Fragen abgeschlossen wie „Was passiert nun, wenn du dich lange genug geradeaus bewegst?“ und „Kehrst du irgendwann einmal zum Ausgangspunkt deiner Bewegung zurück oder nicht?“. Sie stellen eine Belastungsprobe für die Vorstellungsbilder der 1-, der 2- und vor allem der 3-Sphäre dar. Sind diese Vorstellungsbilder ausgebildet, können die Fragen sicher beurteilt werden. Für den Fall der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ kann die Antwort – zumindest in Analogie zu den beiden tieferdimensionalen Situationen – zwar als zustimmend vermutet werden (unter Vernachlässigung von Materie, die den Flug behindern könnte), sie widerspricht damit aber der in alltäglichen Erfahrungen gewonnenen Ansicht, dass eine Reise ins Universum, deren Route immer geradeaus verläuft, gerade *nicht* an ihren Ausgangspunkt zurückführen kann.

Mögliche von Lernenden konstruierte Vorstellungen

Im Verlauf dieser Vorstellungsübung treten einige *produktive* Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern immer wieder auf:

- Im vorgestellten Blickfeld befindet sich nur ein Ausschnitt der gerade aktuellen, lokal ungekrümmten Welt. Da die Welt im Falle von $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{S}^1$ nur einen Freiheitsgrad zur Bewegung besitzt, kann sie wie die *Schienen* einer Eisen- bzw. Achterbahn aussehen.

- Für die beiden Fälle, in denen die lokale Welt ein- bzw. zweidimensional ist, ist es zur Kontrolle und Steuerung der Vorstellungen nützlich, zusätzlich zur lokalen Perspektive auch eine globalere Sicht aufzubauen. Wird etwa die Welt des zu einem Kreis geschlossenen Seils $\mathbb{S}^1$ im Raum $\mathbb{R}^3$ schwebend vorgestellt, kann dank dieses Vorstellungsbilds die Bewegung als Ganzes vorgestellt werden (etwa wie der Seilkreis wieder und wieder durchlaufen wird). Eine solche Außensicht kann durch vorgestelltes Wegzoomen oder durch Perspektivenwechsel eingenommen werden.

- Produktiv ist ferner, wenn die jeweils eindimensionale Welt in der entsprechend zwei- und dreidimensionalen Welt eingebettet und hervorgehoben wird:

  $$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$$

  Jede ‚Geradeaus‘-Bewegung geht zum Beispiel in der Kugeloberflächen-Welt $\mathbb{S}^2$ entlang der Kreisbahn $\mathbb{S}^1$ vonstatten und kann als Spur der Bewegung auf der Kugeloberfläche farbig markiert sein.

Folgende Vorstellungen sind bei der Befolgung der Vorstellungsanweisungen und der Beantwortung der mathematischen Frage *hinderlich*:

- So scheinen (bereits im ein- und zweidimensionalen Fall) die lokale Ungekrümmtheit und die globale Gekrümmtheit nicht vereinbar zu sein, sondern behindern sich gegenseitig – bei einer der beiden Vorstellungen scheinen Abstriche an die Genauigkeit nötig zu sein.

- Beim Aufbau der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ gibt es eine Reihe hinderlicher Umstände. So können die globalen Vorstellungsbilder von $\mathbb{S}^1$ als ganzem Kreis und von $\mathbb{S}^2$ als ganzer Kugel in der analogen Situation von $\mathbb{S}^3$ die Erwartung auslösen, ein Vorstellungsbild der ganzen 3-Sphäre aufbauen zu müssen. Für diese globale Perspektive wäre der Blick aus dem vierdimensionalen Raum $\mathbb{R}^4$ nötig, was zumindest ungewohnt, wenn nicht unmöglich ist.

- Durch den Lauf der Übung wird auf die Frage nach der Rückkehrmöglichkeit in $\mathbb{S}^3$ eine bejahende Antwort suggeriert. Sie steht der Vorstellung eines offenen Weltalls – und den damit verbundenen unbegrenzten Bewegungsmöglichkeiten – entgegen.

- Beim Versuch, sich im dritten Teil des Texts vorzustellen, wie die Erdkugel – die ja von außen wie eine 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ aussieht – in das Universum der 3-Sphäre eingebettet ist, kann stattdessen das Vorstellungsbild der Kugeloberfläche $\mathbb{S}^2$ aus dem zweiten Teil des Texts reaktiviert werden und damit der Schritt in die nächste Dimension misslingen.

- Die Vorstellung des gekrümmten Seils kann von der singulären Vorstellung begleitet sein, dass sich das Seil im kalten, windigen Weltall befindet. Bei einer Schülerin entstand sogar das Vorstellungsbild eines dunklen, nach unten führenden Schachts. Es ist verbunden mit der *Angst*, vom Seil hinunterzufallen – eine ausgesprochen hinderliche Vorstellung.

Mögliche mathematische Prozesse während der Phase der Besprechung

Diese Vorstellungsübung löst Diskussionen darüber aus, was es heißen könnte, sich auf einer *gekrümmten* Fläche „geradeaus" zu bewegen. Darüber hinaus ermöglicht die Vorstellungsübung mathematische Prozesse aus den Bereichen des Darstellens und Nachdenkens über die Bedeutung von Mathematik:

Darstellen der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ und des Raumschiff-Flugs: Durch folgende veranschaulichende Darstellung der 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$ kann der Konflikt zum Schluss der Vorstellungsübung (wenigstens teilweise) aufgelöst werden:

- Aus dem geographischen Atlas ist die Darstellung der Erdoberfläche als zwei *Kreisscheiben* bekannt. Dabei werden einander entsprechende Randpunkte der beiden Scheiben miteinander verklebt gedacht. Analog lässt sich $\mathbb{S}^3$ als zwei *Vollkugeln*, deren einander entsprechende Oberflächen-Punkte miteinander identifiziert werden, veranschaulichen.[68]

- Damit stellt sich der Flug des Raumschiffs wie folgt dar: Ausgehend von einer Stelle in der einen Vollkugel – in der auch die Erde und die Sonne platziert sind – führt der Weg früher oder später an den Rand der Vollkugel. In diesem Moment wechselt der Weg zum entsprechenden Randpunkt der zweiten Kugel, um durch ihr Inneres an deren Rand zu führen. Der Weg wechselt zurück auf die erste Kugel, um schließlich an der Ausgangsstelle des Flugs zu enden. Unter der Annahme, dass sich Licht geradlinig ausbreitet, wäre im Falle eines geschlossenen Universum folglich möglich, dass ein Lichtstrahl, der von einem Punkt auf der erdabgewandten Hälfte der Sonne ausgeht, bei einem Beobachter, der auf der sonnenabgewandten Hälfte der Erde – also nachts – in den Himmel schaut, im Auge endet. Wir würden damit am nächtlichen Sternenhimmel die Sonne als kleinen Leuchtpunkt sehen können. Und noch anders formuliert: Wir könnten von der Erde aus mit einem sehr scharfen Teleskop die Rückseite der Erde sehen – völlig unabhängig davon, in welche Richtung wir das Teleskop richten!

Nachdenken über die Bedeutung von Mathematik für unser Weltbild: Wie schon der mittelalterliche Streit um die Gekrümmtheit der Erdoberfläche zeigt, kann aufgrund lokaler Erfahrungen nicht auf globale Eigenschaften geschlossen werden, auch nicht im Falle von räumlichen Bewegungen. Wir bewegen uns primär in zwei Raumdimensionen, wobei es sich – im Vergleich zur Größe der Erde und erst recht zum Universum – um recht bescheidene Distanzen handelt, und von der dritten Raumdimension kennen wir einen noch viel kleineren Bereich (etwa wenn wir im Flugzeug fliegen). Es liegt nahe, dass der moderne Mensch aufgrund dieser lokalen Erfahrungen das Universum als

[68] Weitere Informationen zur Darstellung der 3-Sphäre finden sich in [Wille 1983] sowie unter `http://www.theory.org/geotopo/3-sphere/html/node2.html`.

einen nicht geschlossenen Raum mit unbegrenzten Bewegungsmöglichkeiten vorstellt. Aus der Tatsache, dass lokal keine Krümmung erfahren werden kann, folgt aber nicht zwingend, dass das Universum auch global ungekrümmt ist und damit eine offene Mannigfaltigkeit vorliegt.[69]

5.3 Erwartete Effekte

Wie die Analyse der Texte zeigt, eröffnen mathematische Vorstellungsübungen ein Terrain für Denkhandlungen und Prozesse, die die aktive Auseinandersetzung mit einem mathematischen Inhalt garantieren (Vergegenwärtigen, Erkunden, Experimentieren, Modellieren, Argumentieren usw.). Der regelmäßige und langfristige Einsatz des Unterrichtsinstruments lässt aber auch umfassendere, über einzelne Übungen hinausgehende Effekte auf die Lernenden erwarten. Dies leitet zur Forschungsfrage *(F3b)* (S. 133) über.

In Folgenden werden also Effekte von Vorstellungsübungen beschrieben, die die Art und Weise mathematischer Aktivitäten und den Umgang mit Mathematik im Allgemeinen betreffen. Sie illustrieren den Titel dieser Arbeit „mathematische Vorstellungen bilden“ mitsamt seiner Doppeldeutigkeit. So wird erwartet, dass Vorstellungsübungen sowohl das Bilden *von* Vorstellungen fördern als auch das Bilden *durch* Vorstellungen – Effekte, in denen spezifisch *fachliche* Ziele zum Ausdruck kommen und Effekte, in denen es um *überfachliche, allgemeinbildende* Ziele des Mathematikunterrichts geht. Zur Begründung dieser Erwartungen werden Forschungsarbeiten aus der Mathematikdidaktik und verwandten Disziplinen, die Analyse der Texte von Vorstellungsübungen (Abschnitt 5.2), Schülerantworten aus der Akzeptanzbefragung (3.2) sowie eigene Unterrichtsbeobachtungen (3.1) herangezogen. Diese Effekte sind also im Sinne von *begründeten Erwartungen* – und nicht im Sinne empirisch überprüfter Wirkungen – zu verstehen.

Gegen Ende dieses Abschnitts werden auch Effekte von Vorstellungsübungen angesprochen, die mit der *Intensität und Nachhaltigkeit des Lernens* im Allgemeinen zu tun haben. Es handelt sich um die Aktivierung der Lernenden, um die Steigerung ihrer Konzentration und ihrer Motivation sowie um eine bessere Erinnerung an Inhalte.

[69] Diese Frage weist Bezüge zur Vermutung Poincarés auf, dass alle kompakten und einfach zusammenhängenden 3-Mannigfaltigkeiten äquivalent zu Sphären sind (siehe etwa [Aigner 2000] oder [Szpiro 2006]). Aber auch aus kosmologischer Sicht ist die Frage, ob unser Universum geschlossen oder offen ist, bis heute nicht beantwortet. Allerdings scheint das Modell eines geschlossenen und damit endlichen Universums favorisiert zu werden [Luminet et al. 1999].

5.3.1 Fachliche Effekte – Bilden von Vorstellungen

Von zwei *fachlichen* Effekten ist auszugehen, wenn Vorstellungsübungen im Unterricht eingesetzt werden. Lernende setzen Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen gezielt zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen ein, das heißt sie lernen,

- produktive Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen aufzubauen,
- Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen als heuristische Strategie einzusetzen.

Diese beiden Effekte sind im Rahmen dieser Arbeit mit dem Schlagwort des „Bildens von Vorstellungen“ gemeint und werden nun begründet.[70]

Aufbau mathematisch produktiver Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen

Besonders in Vorstellungsübungen vom Typ „Aufbau“ und „Begründungen“ werden Hilfestellungen gegeben, um sich komplexe mathematische Objekte (zum Beispiel ein Ikosaeder) oder Sachverhalte (etwa die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks) *vergegenwärtigen* zu können. Die Vorstellungsübungen des Typs „Problemlösen“ und „Paradoxon“ beschreiben nicht bereits produktive Vorstellungen, sondern fordern dazu auf, eigene mathematisch produktive Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen zu entwickeln.

[70] Der fachliche Gewinn von Vorstellungsübungen wird nicht nur von Lehrpersonen, sondern auch von Schülerinnen und Schülern gerne in einem *Training des räumlich-geometrischen Vorstellungsvermögens* vermutet (siehe Tab. 3.4, S. 62). Gewiss spielt das Vorstellungsvermögen eine Rolle, geht es doch auch in Vorstellungsübungen darum, mathematische Sachverhalte „in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken“ [Maier 1999, S. 14]. Allerdings lehnen sich entsprechende Trainings an die Aufgaben von Intelligenztests an, in denen geometrische Fragen zu Figuren und Körpern gestellt werden (für Beispiele siehe [Besuden 1992 a–c], [Maier 1996] und [Maier 1999, S. 36 ff.]).

Vorstellungsübungen gehen darüber hinaus. So müssen in ihnen die sprachlich angeleiteten Vorstellungen erst einmal *konstruiert* werden. Dann werden diese Vorstellungen nicht nur mit anderen Vorstellungen kombiniert (beispielsweise aneinandergelegt oder zerschnitten) und bewegt (etwa rotiert oder gefaltet), vielmehr müssen sie laufend bearbeitet, also *verändert* und *weiterentwickelt* werden. Beide kognitiven Aktivitäten rekurrieren durch die Einbettung mathematischer Inhalte in außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhängen auf *mathematischen Vorkenntnissen* und *außermathematischen Erfahrungen* (siehe S. 127 ff.). In Vorstellungsübungen geht es nicht um das Training eines Muskels, sondern um den Aufbau konkreter inhaltlicher Vorstellungen und um das Kennenlernen einer heuristischen Strategie, weshalb ein Training des Vorstellungsvermögens *zu kurz* greift.

Welche mathematisch produktiven Vorstellungen aufgebaut werden, hängt von der einzelnen Vorstellungsübung ab. Sowohl das Bild eines platonischen Körpers als auch das Begehen sind Vorstellungen, sie ermöglichen die *gedankliche Verfügbarkeit* spezifisch mathematischer Sachverhalte. Das kann zum Beispiel dazu führen, dass Lernende den entsprechenden Körper unabhängig von konkreten Modellen zeichnerisch zu Papier bringen können oder sich nachhaltig an einen mathematischen Sachverhalt erinnern. Durch die Verwandtschaft produktiver Vorstellungen mit regulären Vorstellungen – und so auch mit vom Hofes Grundvorstellungen – werden Vorstellungsübungen zu einem *Unterrichtsinstrument zur Ausbildung regulärer Vorstellungen.*

Die Verfügbarkeit mathematischer Inhalte kann mit einem Gefühl von *Glaubwürdigkeit* und *besseren Verständnis* einhergehen, wie folgende Zitate aus der Akzeptanzbefragung zeigen:[71]

- *„eine Art ‚Aha'-Erlebnisse [...]"* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Mir werden Sachen klar, über die ich gar nie so richtig nachdachte."* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„ein besseres Verständnis für die Mathematik"* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Ich finde Mathematik nicht mehr so kompliziert, ob es wirklich an den VÜ liegt, weiss ich nicht."* (Schülerin, Klasse GB 12.2)

Die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten dürften bei ihren Antworten vor allem an Vorstellungsübungen vom Typ „Begründung" gedacht haben, da dort Hilfestellungen angeboten werden, um mathematische Sachverhalte umfassender zu verstehen. Vermutlich ist diesen Schülerinnen und Schülern ein mathematischer Inhalt (etwa die Berechnung einer unendlichen geometrischen Reihe) *zugänglich* geworden, verbunden mit einer umfassenderen Kenntnis seiner Eigenschaften und Bezüge. Eine Kette von formalen Argumenten ermöglicht das nicht.[72] Aber auch Vorstellungsübungen anderer Typen können zu Glaubwürdigkeit und Verständnis führen, etwa bei der Konstruktion eigener produktiver Vorstellungen oder wenn Vorstellungen von Mitschülerinnen bzw. Mitschülern als produktiv erkannt werden. Wie sehr

[71] Alle in diesem Abschnitt zitierten Schüleraussagen wurden bereits im Kapitel 3 genannt.
[72] Was bewegliches Denken zum Verstehen beitragen kann, beschreibt [Roth 2005, S. 94 ff.].

damit auch die Bildung von Begriffen (im erwähnten Beispiel dem der Konvergenz) einhergeht, lässt sich aus den obigen Zitaten jedoch nicht ablesen.

Es wäre aufgrund der genannten Selbsteinschätzungen der Schülerinnen und Schüler sicher übertrieben, dem Unterrichtsinstrument pauschal eine Vergrößerung des Vorrats an produktiven Vorstellungen oder eine Verbesserung des mathematischen Verständnisses zuzusprechen. Es darf jedoch erwartet werden, dass Lernende durch Vorstellungsübungen *spezifische mathematische Inhalte gedanklich aufbauen und so verfügbar machen können, dass sich das Gefühl der Glaubwürdigkeit und des Verständnisses einstellt.*

Verwendung von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen als Strategie

Vorstellungen und ihre gedankliche Bearbeitung fallen uns im Alltag nicht nur kaum auf, sie werden auch nur selten bewusst und explizit für heuristische Prozesse eingesetzt. So wird auch gerade im Mathematikunterricht höherer Klassen kaum je erwähnt geschweige denn systematisch vermittelt, welche Vorteile es hat, sich einen Sachverhalt zu *vergegenwärtigen* und (unabhängig von realen Gegebenheiten oder Darstellungen) mit ihm gedanklich zu *experimentieren.* Heuristische Prozesse werden mit anderen Worten bestenfalls implizit verwendet. Im Gegensatz dazu setzen Vorstellungsübungen Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen *im Sinne einer Strategie* ein, um spezifische mathematische Situationen zu erkunden und in diesen Situationen zu experimentieren. Ihr Einsatz kann somit dazu führen, dass Gymnasiastinnen und Gymnasiasten Vorstellungen auch im Kontext des verbleibenden Mathematikunterrichts verwenden.

Auf entsprechende Auswirkungen auf den Mathematikunterricht im Allgemeinen deuten folgende Schülerantworten hin:

- *„Ich kann mir nun auch andere Dinge aus der Mathematik besser vorstellen.“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Ich fühle mich geübter darin, mir etwas vorzustellen und versuche dies zu perfektionieren [...].“* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Ich versuche mir Mathe-Aufgaben bildlicher vorzustellen, was mir auch hilft, diese einfacher zu lösen.“* (Schüler, Klasse GE 11)
- *„bessere Vorstellung der gefragten Problematik. Im Kopf das Ganze ablaufen lassen und dann erst schriftlich anfangen.“* (Schüler, Klasse GE 11)

Die Schülerin und die Schüler beschreiben hier, dass es nützlich ist, sich eine vorgegebene mathematische Situation zu vergegenwärtigen und sie gedanklich zu bearbeiten, zum Beispiel bei Problemlöse-Aufgaben. Damit wird die Konstruktion von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen zu einem *Arbeitsinstrument*. Im Gegensatz dazu führen sich Schülerinnen und Schüler mathematische Fragestellungen üblicherweise nicht so sehr vor Augen, sondern probieren und handeln ‚drauflos'.[73] Im Unterschied zum bereits genannten Effekt des Aufbaus von produktiven Vorstellungen hängt dieser Effekt weniger vom mathematischen Inhalt der einzelnen Vorstellungsübungen ab als vielmehr von der Deutlichkeit, mit der Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen als Erkenntnis gewinnende, heuristische Strategie bei der Beantwortung mathematischer Fragen eingesetzt werden.

Es wird hier nicht beansprucht, dass sich alle mathematischen Fragestellungen durch die Vergegenwärtigung von Vorstellungen angehen lassen. Aufgrund der wenigen Schüleraussagen wäre es zudem vermessen, dem Unterrichtsinstrument pauschal die Verbesserung der mathematischen Vorstellungsfähigkeit zuzusprechen. Es darf jedoch erwartet werden, dass Lernende durch langfristige Gewohnheitsbildung *Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen in ihr Repertoire an Strategien, auf das sie im Umgang mit mathematischen Fragestellungen zurückgreifen, aufnehmen und auch vermehrt einsetzen.*

5.3.2 Überfachliche Effekte – Bildung durch Vorstellungen

Neben dem Bilden von Vorstellungen können zwei Effekte ausgemacht werden, die mit *überfachlichen, allgemeinbildenden* Zielen zu tun haben. Vorstellungsübungen unterstützen einen Mathematikunterricht,

- der zur Nachdenklichkeit anregt, und
- sie können ein offeneres, angemessenes Mathematikbild vermitteln.

Diese beiden Effekte werden unter dem Schlagwort der „Bildung durch Vorstellungen" zusammengefasst und nun begründet.

Förderung von Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht

In unserer abendländischen Gesellschaft wird Nachdenklichkeit als ein Bildungsziel jeglichen Unterrichts angesehen. Menschen sollen am Ende ihrer

[73] Zur Beobachtung, dass Lernende zuerst handeln können wollen, bevor sie für Verstehensfragen offen sind, siehe die entsprechende Fußnote auf S. 95.

Schullaufbahn nicht nur Inhalte kennen und können, sondern auch im Stande sein, darüber zu reflektieren. So macht etwa Hartmut von Hentig in der *Nachdenklichkeit* das entscheidende Moment für die Allgemeinbildung aus:

> „‚Bildung' ist eine Geistesverfassung, Ergebnis eines nachdenklichen Umgangs mit den Prinzipien und Phänomenen der eigenen Kultur. Eine allgemeine Bildung ist sie in dem Maß, in dem sie der Verständigung unter den Menschen über ihre Welt dient." [von Hentig 1980, S. 108 f.]

Einen entsprechenden Mathematikunterricht mit dem erklärten Bildungsziel eines „nachdenklichen Umgangs" entfaltet Prediger und regt dazu an, besonders die *Selbstreflexion* sowie die *Bedeutungs- und Sinnreflexion* zu fördern.[74] Unter Bezugnahme auf Bauer unterscheidet sie zwischen vier Varianten mathematikbezogener Reflexion:[75]

> „1. *Inhaltsreflexion*, d. h. ein ‚auf mathematische Inhalte und Themen sich richtendes bewußtes, prüfendes Nachdenken und Überlegen, ein sich Vertiefen in Mathematik. [...]'
> 2. *Gegenstandsreflexion*, d. h. die ‚Reflexion über Entwicklungslinien, Strukturmerkmale, Erscheinungsformen, Grundlagenfragen der Mathematik. Die Reflexion richtet sich auf das Wesen der Disziplin Mathematik.'
> 3. *Bedeutungs- und Sinnreflexion*, d. h. ‚Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen mathematischen Denkens, über die Bedeutung der Mathematik und über den Sinn einer Beschäftigung mit Mathematik. [...]'
> 4. *Selbstreflexion*, d. h. die Reflexion über die Bedeutung des Gegenstandes Mathematik für die eigene Person: Sie ‚betrachtet, analysiert, prüft auf der Metaebene die eigene Beziehung zur Mathematik.'" [Prediger 2002, S. 400 f.]

Nach Prediger eignen sich die „großen wissenschaftstheoretischen Fragen" zur Förderung eines nachdenklichen Umgangs mit Mathematik nicht besonders, auch wenn dies durch Bauers Unterscheidung nahegelegt wird. Methodischer Ansatzpunkt für einen nachdenklichen Unterricht ist vielmehr die *authentische Betroffenheit* und damit Fragen wie „Was hat das mit mir zu tun?".

[74] Ihre Forderung nach Reflexion stellt Prediger in den größeren Zusammenhang der *Interkulturalität*, wonach Mathematiklernen im Spannungsfeld von Alltags- und Fachkultur stattfindet [Prediger 2004, S. 210–261].
[75] Siehe [Bauer 1990, S. 6 f.] bzw. [Bauer 1988, S. 182 ff.].

Gerade Lernende, die Nachdenken über mathematische Inhalte eher vermeiden, wenden sich durch solche Fragen auch einer inhaltlichen Reflexion zu.[76]

Auch Vorstellungsübungen gehen von der positiven Betroffenheit der Schülerinnen und Schüler aus. Diese ist nicht nur beim Einsatz des Instruments im Unterricht spürbar, sondern geht auch aus einigen Reaktionen auf die Akzeptanzbefragung hervor:

- *„Gewisse beeindruckende Übungen können mich einen ganzen Tag lang beschäftigen."* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„Sie regen mich an, meine Gedanken weiterzuführen und mit Vorstellungen zu spielen (zB. Unendlichkeit) [...]"* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„Ich habe nochmals alle VÜ mit meinem Vater gemacht (sehr witzig + interessant). [...]"* (Schülerin, Klasse GB 11)

Grundlage der hier ausgedrückten Betroffenheit ist vermutlich – neben der Wahl des mathematischen Themas und seinem Bild- und Handlungszusammenhang – die in der Unterrichtsumgebung angelegte Fokussierung auf singuläre Vorstellungen und Vorstellungsweisen. Singuläre, auf mathematische Inhalte bezogene Vorstellungen und Vorstellungsweisen werden als *subjektiv relevantes* und *eigenes* Produkt erlebt, das sich von dem der Mitmenschen mehr oder weniger stark unterscheidet und mit dem man zunächst einmal unausweichlich alleine ist.[77] Dies berührt und macht betroffen. Nicht zuletzt deshalb setzen sich die meisten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten so bereitwillig mit Vorstellungsübungen auseinander, was – wie die Zitate zeigen – in Einzelfällen sogar über die Vorstellungsübung hinausgehen kann.

Eine der beiden Fragen am Ende der ersten Phase richtet sich immer auf diese singulären Vorstellungen und damit auf eine *Selbstreflexion* eigener kognitiver Prozesse im Umgang mit Mathematik: Wie funktioniert mein Vorstellen in dieser Vorstellungsübung? Wo funktioniert es nicht? Welche Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen gelangen zum Einsatz? Welche sind für

[76] Dass der Mathematikunterricht auch reflexive Elemente enthalten soll, wird seit langem gefordert. Allerdings liegt dieser Forderung ein recht inhomogenes Reflexionsverständnis zugrunde, wie ein Vergleich von [Pólya 1949, S. 28 f.], [Fischer & Malle 1985, S. 279, 298], [Schoenfeld 1985, S. 97–144; 1987 b], [Neubrand 1990], [Wheatley 1992], [Sjuts 1999; 2001; 2003], [Hefendehl-Hebeker 2004 b] und [Lengnink 2005 c] zeigt.

[77] Siehe auch die bereits auf S 71 zitierte Antwort „[...] niemand kann meine Gedanken sehen".

mich produktiv, welche behindern mich? Ist es produktiver, ein vorgestelltes Objekt vor mir zu drehen oder es zu umlaufen?[78]

Einige Schülerinnen und Schüler beantworteten die Fragen nach den Auswirkungen von Vorstellungsübung denn auch hinsichtlich einer geförderten Selbstreflexion:

- *„bin interessiert, über Gebiete ‚hinterm inneren Auge' nachzudenken"* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Ich erfahre vieles über meine Denkweise und meine Art u. Weise, an (z. B.) mathematische Probleme heranzugehen"* (Schülerin, Klasse GB 12.2)
- *„Ich dachte manchmal darüber nach, warum ich es mir nicht vorstellen konnte."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Ich finde es interessant zu beobachten, welche Bilder in mir entstehen. Ich achte mich seit den VÜ mehr auf meine inneren Bilder allgemein."* (Schülerin, Klasse GB 10)

Diese Nachdenklichkeit bleibt jedoch keineswegs auf eigene singuläre Vorstellungen und Vorstellungsweisen beschränkt. Wegen der positiven Betroffenheit liegt bei vielen Schülerinnen und Schülern in der Phase der Besprechung nicht nur ein enormes Mitteilungsbedürfnis vor, sondern auch eine große Neugier auf die Vorstellungen *der anderen*. So stellen sich Fragen wie folgende: Wie sehen meine eigenen Vorstellungen im Vergleich mit den anderen aus? Wie sehen sie im Vergleich zu mathematisch-regulären Vorstellungen aus? Welche Vorstellungen von Mitschülerinnen und Mitschülern könnten für mich produktiv sein? Für eine Schülerin scheint gerade dieser soziale Bezug ein lohnenswerter Aspekt von Vorstellungsübungen zu sein, denn sie schreibt:

- *„[...] ich finde es noch interessant, wie dasselbe bei anderen ganz verschiedene Sachen auslösen kann."* (Schülerin, Klasse GE 11)

[78] Ergebnisse der *Metakognitionsforschung* belegen, dass Selbstreflexion in Form von Reflexion und Regulation eigener kognitiver Lernprozesse das Gelingen von Lernen positiv beeinflusst, falls sie an konkreten Inhalten und Situationen vorgenommen wird [Reusser 2001, S. 124]. Für die Mathematikdidaktik sind empirische Arbeiten von [Schoenfeld 1985], [Sjuts 2001] und [Sjuts 2003] zu nennen, für empirische Studien zur allgemeinen Lernwirksamkeit metakognitiver Prozesse siehe [Kaiser & Kaiser 1999, S. 45 ff.], [Helmke & Weinert 1997, S. 73 f.] und [Hasselhorn 2001].

Wie Prediger behauptet, wenden sich Schülerinnen und Schüler auch im Rahmen von Vorstellungsübungen durch Selbstreflexionen der *Inhaltsreflexion* – der Reflexion des Gegenstands Mathematik – zu. Wie die im Abschnitt 5.2 beschriebenen mathematischen Prozesse erkennen lassen, spielt die Inhaltsreflexion in allen Vorstellungsübungen eine wesentliche Rolle. Dabei mischen sich insbesondere bei Vorstellungsübungen vom Typ „Paradoxon“ Reflexionen über eigene und fremde Vorstellungsweisen mit Reflexionen über mathematische Fachinhalte. So geht es in „Hilberts Hotel“ und „Geschlossenes oder offenes Universum?“ um einen vorstellenden Umgang mit dem Inhalt der Unendlichkeit (einmal in der Mengenlehre, einmal in der Geometrie) und gleichzeitig um die Fassung des mathematischen Konzepts der Unendlichkeit.

Obwohl Vorstellungsübungen alleine nicht von Hentigs Ideal, also einen „nachdenklichen Umgang mit den Prinzipien und Phänomenen der eigenen Kultur“, hervorbringen können, so vermögen sie dennoch, über die Reflexion singulärer und regulärer Vorstellungen eine Reflexion über Mathematik im Allgemeinen auszulösen. Damit unterstützen Vorstellungsübungen einen Unterricht, *der sich dem Bildungsziel eines nachdenklichen Umgangs mit Mathematik verpflichtet sieht.*[79]

Vermittlung eines angemessenen Mathematikbildes

Hans Werner Heymann entwickelt in *Allgemeinbildung und Mathematik* mehrere „Aufgaben eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts“, so etwa die kulturelle Kohärenz, die Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch und die Ich-Stärkung [Heymann 1996]. Dies liest sich wie ein Plädoyer für einen Unterricht, in dem beispielsweise unterschiedliche Zugänge zur Mathematik und ein variabler Umgang mit Mathematik als Bereicherung angesehen werden und erwünscht sind. Da Lernende die erlebten Unterrichtsinstrumente als prototypische Herangehensweise an die vom Unterrichtsfach vertretene Fachwissenschaft erleben, stellt sich leicht ein negatives *Mathematikbild* ein:

> „Das Mathematikbild, das Kinder und Jugendliche während ihrer Schulzeit aufbauen, wird mitgeprägt von den konkreten Erfahrungen, wie im Unterricht mit Mathematik umgegangen wird. Wenn viele Erwachsene in der Mathematik ein abgeschlossenes, starres System von abstrakten

[79] Es kann nur vereinzelt beobachtet werden, dass sich durch Vorstellungsübungen quasi von selbst die Reflexion über den Gegenstand Mathematik einstellt, also ein Nachdenken, das sich über die Inhalte hinaus auf die Bedeutung oder sogar das ‚Wesen‘ von Mathematik richtet. Gegenstandsreflexion findet erst dann statt, wenn eine Vorstellungsübung – wie etwa im Beispiel „Geschlossenes oder offenes Universum?“ – explizit darauf zielt.

> Regeln, seltsamen Symbolen und angsteinflößenden Formalismen sehen, so nicht, weil sie dies jemand *ausdrücklich* gelehrt hätte, sondern weil sie es, aufgrund der Erfahrungen, wie im Unterricht mit Mathematik umgegangen wurde, stillschweigend und unterderhand mitgelernt haben: Ihr subjektives Bild der Mathematik läßt sich nicht zuletzt als Niederschlag der Unterrichtskultur deuten, an der sie teilhatten.“ [Ebd., S. 268 f., Hervorhebung im Original]

Unter anderem als Folge eines auf Präsentation regulärer und ‚polierter‘ Fachinhalte zentrierten Mathematikunterrichts entwickeln Lernende ein Bild von Mathematik, das die beiden (fingierten) Aussagen „Mathematik ist die Wissenschaft von ‚Richtig‘ und ‚Falsch‘ “ und „In der Mathematik ist alles ‚fertig‘ “ pointiert zum Ausdruck bringen.[80] Gerade im schulischen Kontext erscheint Mathematik den Lernenden bis ins Letzte festgelegt – jede mathematische Frage besitzt genau eine einzige Antwort und es gibt immer genau einen Weg, der zur Lösung führt. Lernende haben sich an diese ‚richtige‘ und ‚fertige‘ Mathematik anzupassen, die von der Person des Lehrenden verkörpert wird, denn „im Zweifelsfall hat der Lehrer qua Amt recht“ [ebd., S. 267]. Ob und wie sich Schülerinnen und Schüler mit Mathematik auseinandersetzen, ändert nichts an der Schulmathematik, in der einzig Reguläres zählt.[81] Da erstaunt es nicht, wenn Mathematik wahrgenommen wird als System von „abstrakten Regeln, seltsamen Symbolen und angsteinflößenden Formalismen“ und sich Lernende kaum ermutigt fühlen, sich mit Mathematik zu befassen.[82]

Dieses Bild von Mathematik ist nicht nur aus pädagogischer Sicht, sondern gerade auch aus Sicht der *Fachwissenschaft* allzu geschlossen und der Mathematik nicht angemessen. Mathematik verwaltet nicht nur Bestehendes, sondern sie weist dort, wo geforscht wird, experimentelle und ‚unfertige‘ Aspekte auf. So stellen Einzelne ihre (ihrer Ansicht nach richtigen) Ergebnisse auf Fachkonferenzen und in Publikationen vor, um sie dem innerfachlichen Diskurs – und damit der mathematischen Gemeinschaft – auszusetzen. Erst dieser Vorlauf ermöglicht, mathematische Wissensinhalte in Systeme zu fassen, die breit akzeptiert – und damit regulär – sind.[83]

[80] Auf diesen Punkt wird auch bei [Schoenfeld 1987 b, S. 200] hingewiesen.

[81] Siehe dazu Heymanns „Merkmale der herkömmlichen Unterrichtskultur“, besonders H 3, H 6, H 9, H 10, H 25 sowie H 4, H 8 und H 11 [Heymann 1996, S. 264–267].

[82] Für weitere Mathematikbilder von Schülerinnen und Schülern siehe [Bauer 1988, S. 112–169], [Bauer 1990, S. 9] oder [Pehkonen 1995, S. 50–53].

[83] Aus einer soziologischen Perspektive macht Heintz zwei unterschiedliche Wahrheitsbegriffe aus, an denen sich Mathematikerinnen und Mathematiker orientieren, einen „objektiven“ und einen „konsenstheoretischen“ Wahrheitsbegriff. So vertreten sie zwar die Auffas-

Aber auch aus Gründen der *Interessens- und Leistungsentwicklung* ist ein negatives Mathematikbild fatal. Empirische Studien weisen darauf hin, dass sich die Qualität des Mathematikbildes im Interesse und in der schulischen Leistung Jugendlicher niederschlägt. Ein Schulfach wird dann besonders engagiert verfolgt, wenn es als relevant für die Definition und Demonstration der eigenen Identität erachtet wird. Wie bereits ausgeführt bietet die Schulmathematik in den Augen vieler Lernender jedoch kaum Möglichkeiten zur eigenen Gestaltung und damit zum Ausdruck der eigenen Person. Deshalb tun sich Schülerinnen und Schüler tendenziell schwer damit, sich im Fach Mathematik zu engagieren oder ein Studium der Mathematik aufzunehmen. Dieser Befund lässt sich in der (fingierten) Schüleraussage „Mathe hat nichts mit mir zu tun – und ich nicht mit Mathe!“ zusammenfassen.[84]

In Vorstellungsübungen werden Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen unter einer regulären *sowie* unter einer singulären Perspektive in den Blick genommen. Die Frage nach ‚Richtig‘ oder ‚Falsch‘ – also nach der Regularität – ist nicht die einzig interessante und auch nicht das maßgebliche Kriterium.[85] Durch die Fokussierung auf singuläre Vorstellungen in der ersten Phase jeder Vorstellungsübung wird den Lernenden ermöglicht, das Spannungsfeld, in dem Mathematik durch ihr eigenes Zutun entsteht, zunächst einmal auszuloten. Lernende können erleben, dass und wie sie im Rahmen einer mathematischen Frage etwas ausrichten können. Damit wird der Raum geöffnet, um eigene, auch unfertige Vorstellungswege zu formulieren und mitzuteilen. Diese Wege können ihrerseits den weiteren Unterrichtsverlauf beeinflussen.[86] Damit kann auch der bereits beschriebene Effekt der Förderung von Nachdenklichkeit einen positiven Einfluss auf das Mathematikbild ausüben.

Aus diesen Gründen ist es plausibel, dass Vorstellungsübungen zur Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik beitragen. Wie dieses Bild aussehen könnte, geht aus einigen Antworten der Akzeptanzumfrage hervor:

sung, dass mathematische Wahrheit nicht davon abhängt, ob sie erkannt wird, entscheiden aber als mathematische Gesellschaft in *sozialen Prozessen* darüber, welche Theoreme für wahr gehalten werden und welche nicht. Für den Fall mathematischer Beweise zitiert sie den Logiker Manin: “A proof only becomes a proof after the social act of ‘accepting it as a proof’ ” [Heintz 2000, S. 178].

[84] Für Ausführliches siehe [Hannover & Kessels 2003; 2004] und [Kessels & Hannover 2004].

[85] Die gestellte Frage muss ja auch aus fachwissenschaftlicher Sicht *nicht* abschließend beantwortet sein, wie die Vorstellungsübung „Geschlossenes oder offenes Universum?“ (siehe S. 195 ff.) und das Beispiel der Collatzfolge (S. 172 ff.) zeigen.

[86] Vergleiche mit der auf S. 71 bereits zitierten Antwort eines Schülers auf die Frage nach Auswirkungen von Vorstellungsübungen: „Ich kann meine persönliche Meinung im Unterricht einbringen“.

- *„Es ist mir bewusst geworden, dass es für ein (mathematisches) Problem immer viele Lösungswege gibt."* (Schüler, Klasse GB 11)
- *„Ich kann Mathematik in Form von etwas Vorstellbarem anwenden, was ansonsten bei Mathe nicht der Fall ist."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Man bekommt eine andere / weitere Vorstellung von Mathe als bei den üblichen eingegrenzten Themen."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)
- *„Mathematik von einer anderen Seite [...]"* (Schüler, Klasse GB 12.1)
- *„Eigentlich überhaupt nichts, wenn dann nur unterbewusst, dass sie mir mein ziemlich negatives Bild von Mathe ein wenig verbessern."* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Das Mathematikbild dieser Schülerinnen und Schüler scheint dank Vorstellungsübungen „anders" und „weiter" geworden zu sein. Mathematische Probleme haben nicht nur einen, sondern mehrere Lösungswege, Mathematik befasst sich nicht nur mit abstrakt-formalen, sondern auch mit vorstellbaren Inhalten. Beide Erweiterungen sind der Fachwissenschaft weitaus angemessener als das beschriebene negative Mathematikbild. Vorstellungsübungen unterstützen mit anderen Worten einen Unterricht, *der sich der Vermittlung eines angemessenen Mathematikbildes verpflichtet sieht.*

5.3.3 Effekte für das Lernen

Über die beschriebenen, im Zusammenhang mit Mathematik stehenden fachlichen und überfachlichen Effekte hinaus werden abschließend noch einige Effekte angesprochen, welche die Intensität und die Nachhaltigkeit des Lernens betreffen. Es handelt sich um die Effekte

- der *Aktivierung*,
- der *Steigerung der Konzentration* und der *Motivation*
- sowie der *besseren Erinnerung.*

Die moderne Lernforschung formuliert Kriterien, wie Lernen organisiert sein sollte, um erfolgreich und nachhaltig zu sein. So gilt heute die aktive Konstruktion als wichtiges Merkmal entsprechender Lernumgebungen ([Weinert

1996], [Helmke 2004, S. 66]). Wie bei der Positionierung des Unterrichtsinstruments (S. 133 ff.) ausgeführt, lässt es sich einer gemäßigt konstruktivistischen Auffassung von Unterricht zuordnen. Insofern Vorstellungsübungen dazu auffordern, Vorstellungsbilder zu mathematischen Inhalten zu konstruieren und mit diesen Vorstellungen gedanklich zu operieren, zielen sie auf die *Aktivierung* der Lernenden. Fachliche Inhalte werden durch das Unterrichtsinstrument so angeboten, dass Singuläres im Zusammenhang mit mathematischen Inhalten evoziert und thematisiert wird. Dadurch können sich die Schülerinnen und Schüler eigenständig mit fachlichen Fragen auseinandersetzen.

Aufgrund eigener Unterrichtsbeobachtungen vermute ich, dass sich Vorstellungsübungen nicht nur konzentrationssteigernd, sondern insbesondere auch *motivationssteigernd* auswirken. So richteten die Schülerinnen und Schüler ihre Aufmerksamkeit und ihr Interesse auf singuläre Vorstellungen und diskutierten sie erstaunlich engagiert und ausdauernd selbst dann, wenn eine Vorstellungsübung in einer zeitlich ungünstig gelegenen Unterrichtsstunde stattfand und deshalb mit großen Ermüdungserscheinungen zu rechnen gewesen wäre.[87] Der Grund ihrer Motivation könnte darin zu suchen sein, dass Vorstellungen in besonderem Maße der eigenen Kontrolle und Bearbeitung unterliegen und damit selbstbestimmtes Handeln erfordern. Dies wäre umso bemerkenswerter, als das Unterrichtsinstrument Vorstellungen stark extern zu lenken scheint.[88]

Die Nachhaltigkeit von Lernprozessen betrifft ebenfalls die *Erinnerung* an fachliche Inhalte. Aufgrund der Tatsache, dass Vorstellungen mit eigener Aktivität einhergehen werden, scheint es plausibel zu sein, dass sie länger und genauer erinnert werden.[89] In der Aktzeptanzumfrage wies eine Gymnasias-

[87] Für diesbezügliche Antworten aus der Akzeptanzbefragung siehe S. 69, und für die uneinheitliche Beurteilung der entsprechenden Behauptungen siehe S. 61 (Items Nr. 5, 6).

[88] Die Motivationspsychologie stützt die Beobachtung, dass Menschen bessere Leistungen erbringen, wenn sie sich als *selbstbestimmt*, also als Urheber von und in Übereinstimmung mit ihren eigenen Handlungen erleben. Dieser Befund ist gerade für schulisches Lernen bedeutsam, weil davon auszugehen ist, dass es eher extrinsisch als intrinsisch motiviert ist. Lernen Schülerinnen und Schüler jedoch nicht in der Hoffnung auf sachfremde Belohnung, sondern machen sie sich das Lernen zur eigenen Sache und handeln infolgedessen selbstbestimmt, verbessern sich ihre Aussichten auf Erfolg. ([Deci & Ryan 1993] und [Ryan & Deci 2000, S. 72])

[89] Die Bedeutung von Vorstellungen für *Gedächtnisleistungen* wird seit den Rhetorikern der Antike bis zu den Kognitionspsychologen der Neuzeit betont (siehe etwa [Bannert & Schnotz 2006, S. 75–78], für eine Zusammenfassung [Richardson 1999, S. 103 ff.]). So weisen empirische Untersuchungen darauf hin, dass Handlungsphrasen nicht nur dann besser erinnert werden, wenn die beschriebenen Handlungen während des Lernvorgangs ausgeführt (statt angeschaut oder gehört) werden, sie werden auch dann besser erinnert, wenn an und mit *vorgestellten Objekten gedanklich operiert* wird. [Engelkamp 1997, S. 75–80]

tin darauf hin, sich länger an Vorstellungsübungen zu erinnern als an andere Unterrichtsinhalte.[90] Ihre Antwort ist jedoch wenig aufschlussreich, da unklar bleibt, woran sie sich erinnert: An Gefühle, die mit Vorstellungsübungen im Zusammenhang stehen? An Vorstellungen oder Kommentare ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler? An mathematische Inhalte? Darüber hinaus sagen bloße Erinnerungen nichts darüber aus, wie mit den erinnerten Inhalten umgegangen wird – was in einem schulischen Kontext, in dem es ja nicht um reine Behaltensleistungen geht, von mindestens ebenso großer Bedeutung ist.

Insgesamt gesehen darf also vermutet werden, dass sich das Unterrichtsinstrument innerhalb seines begrenzten Rahmens *günstig auf die Intensität und die Nachhaltigkeit des Lernens* auswirken, weil es wichtige Kriterien der Lernforschung erfüllt. Diese Vermutung ist mit den hier aufgearbeiteten Materialien jedoch nicht belegbar – zumal jedes neue Unterrichtsinstrument sie beanspruchen wird.

[90] „Ich kann mich länger daran erinnern als an etwas gelesenes oder gehörtes!“ (S. 67).

6 Grenzen und Ausbau des Unterrichtsinstruments

Wie im vorangehenden Kapitel dargestellt, bergen mathematische Vorstellungsübungen ein reichhaltiges mathematikdidaktisches Potenzial. Werden neue Unterrichtsinstrumente und -methoden entwickelt und beschrieben, unterliegen sie grundsätzlichen Gefahren und Gefährdungen. Dazu gehört der Glaube an die „eine, eigene Methode". Weinert gibt Folgendes zu bedenken:

> „Kompetent realisierte Unterrichtsmodelle, sachgerechter und nicht willkürlicher Methodenpluralismus, ein flexibles, aber nicht beliebiges pädagogisches Handeln werden auch in der künftigen Lernkultur den guten Lehrer kennzeichnen; der Glaube an die eine, eigene Methode und deren Instrumentalisierung für eine wissenschaftliche oder gesellschaftliche Ideologie dürften demgegenüber auch in der Zukunft die gefährlichen Wurzeln eines neuen pädagogischen Dilettantismus sein."
> [Weinert 1997, S. 26 f.]

Weinert weist damit insbesondere auf die mögliche „Dogmatisierung progressiver Unterrichtsmethoden" hin, „obwohl erwiesen ist, daß es keine Lehrverfahren und keine Lernstrategie gibt, die für alle und für alles gleichermaßen geeignet wäre" [ebd., S. 26].

Diese Aussagen werden im Sinne der Aktionsforschung als Mahnung für einen kritischen Blick auf das Unterrichtsinstrument ernst genommen. Im folgenden ersten Abschnitt 6.1 werden inhaltliche Grenzen von Vorstellungsübungen benannt – Vorstellungsübungen sind nicht immer und für jeden Inhalt geeignet. Im zweiten Abschnitt 6.2 werden Schwierigkeiten diskutiert, die Schülerinnen und Schüler mit der Unterrichtsumgebung haben können – Vorstellungsübungen sind auch nicht für alle Lernenden gleichermaßen geeignet. Um Schwierigkeiten möglichst zu vermeiden, werden zudem einige Modifikationen der Unterrichtsumgebung vorgeschlagen.

In Abschnitt 6.3 schließlich wird vorgeschlagen, wie sich Vorstellungsübungen ausbauen lassen, um Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen bei Schülerinnen und Schülern nicht nur zu stimulieren, sondern stärker als bisher explizit zu machen. Infolgedessen können nicht nur Denkbarrieren wie hinderliche Vorstellungen besser ausgemacht werden, sondern auch produktive Vorstellungen weiterentwickelt und im anschließenden Mathematikunterricht besser genutzt werden.

Damit geht es in diesem Kapitel um folgende Forschungsfragen (S. 12):

(F4a) Welchen inhaltlichen Grenzen unterliegen die Vorstellungsübungen?

(F4b) Welche Schwierigkeiten können beim Einsatz des Unterrichtsinstruments auftreten? Welche Ursachen sind denkbar? Wie kann ihnen begegnet werden?

(F4c) Wie lässt sich die Unterrichtsumgebung ausbauen, damit ihre Impulse stärker als bisher im Unterrichtsverlauf genutzt werden können?

Mit den Antworten auf die letzten beiden Fragen – Aktionsvorschlägen für die Unterrichtspraxis – schließt sich der Kreislauf der Aktionsforschung, der in der Praxis begonnen und über Beobachtungen aus der Unterrichtspraxis in die theoretische Begründung und Analyse des Unterrichtsinstruments geführt hat (siehe Abb. 1.1, S. 6).

6.1 Inhaltliche Grenzen

Wie schon aus der Liste der analysierten Vorstellungsübungen abgelesen werden kann, werden in den Vorstellungsübungen *spezifische* mathematische Inhalte präsentiert. Dies hat weniger mit der Auswahl der acht Vorstellungsübungen als mit *prinzipiellen inhaltlichen Grenzen* des Unterrichtsinstruments zu tun – nicht alle mathematischen Inhalte eignen sich für Vorstellungsübungen gleichermaßen. Eine Bedingung – und damit die erste inhaltliche Grenze – für Vorstellungsübungen ist, dass sich der mathematische Inhalt *anschaulich* als eine Folge von Vorstellungsanweisungen darbieten lassen muss. Eine zweite natürliche Begrenzung ist dadurch gegeben, dass die vorzustellenden mathematischen Inhalte nur *begrenzt komplex* sein dürfen.

Damit sind die Grenzen von Vorstellungsübungen im Bereich fachlicher Inhalte enger als die manch anderer Unterrichtsinstrumente. Diese prinzipielle Begrenztheit von Vorstellungsübungen ist ein weiterer Grund dafür, von einem „Unterrichtsinstrument“ zu sprechen (siehe S. 21 f.).

6.1.1 Anschaulichkeit

Ein mathematischer Inhalt eignet sich für eine Vorstellungsübung genau dann, wenn er sich in einen gedanklichen Sachzusammenhang einbinden lässt, in dem gehandelt werden kann (im Sinne des Konstruierens, Bearbeitens und Bewegens von Vorstellungen). Damit bieten sich *geometrische* Themen schon wegen ihrer Bildhaftigkeit und der Möglichkeit, mit ihnen handelnd umzugehen, besonders an. Geometrische Konstruktionen und geometrische Probleme, aber auch geometrische Begründungen erfüllen naturgemäß die Forderung, dass bildhafte Konfigurationen entworfen, bearbeitet und bewegt werden.

Unterrichtsinhalte, die auf formal-begriffliche Argumentationen zielen, liegen *außerhalb* des Bereichs von Vorstellungsübungen, so der klassische Widerspruchsbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder der Beweis von der Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen.[1] Solche Beweise können zwar von singulären Vorstellungen begleitet sein, worauf schon Hadamard hinweist [Hadamard 1949, S. 76 f.], der hier geschilderte Gedankengang präsentiert sich jedoch als Folge logischer Argumente, in denen Vorstellungen bestenfalls am Rande – im Sinne einer Begleiterscheinung – eine Rolle spielen. Da Vorstellungsübungen explizit zur Konstruktion und Manipulation von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen anregen, müssen Argumentationen, deren einziger Handlungsgehalt im Umformen, Ergänzen und Streichen von Termen liegt, entsprechend aufbereitet werden. Dass dies möglich ist, zeigt die Vorstellungsübung „Reihe berechnen“, in welcher der Wert der konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ berechnet wird (S. 27). Aber nicht nur dieses Beispiel demonstriert, dass sich in Vorstellungsübungen auch *nichtgeometrische* Sachverhalte präsentieren lassen, wenn sie nur in anschaulicher Weise aufbereitet sind. Auch die „Collatzfolge“ (S. 27) und „Hilberts Hotel“ (S. 28 f.) geben dafür ein Beispiel ab.

Der Forderung nach Anschaulichkeit Selbstevidenz zu unterstellen, hieße allerdings, sie misszuverstehen.[2] Wird Anschaulichkeit jedoch im Sinne Witt-

[1] Gemeint sind hier die beiden auf Euklid zurückgehenden klassischen Beweise. Der Widerspruchsbeweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ wird von Euklid mit einem eleganten Gerade-Ungerade-Argument geführt [Euklid 1973, S. 313 f.]. In dieser Form regt der Beweis kaum zu Vorstellungsbildern und -handlungen an, die die Argumentation stützen. Für eine konstruktive Argumentationsweise, die sich vermutlich zu einer Vorstellungsübung umformulieren lässt, siehe die „ungemein suggestive Figur“ bei [Wittenberg 1963, S. 175].

[2] Darauf weist Winter hin, wenn er schreibt, dass die „Verwendung von Veranschaulichungen [...] nicht als Denkersatz fungieren [kann, sondern] selbst eine *Form des Denkens*“ ist [Winter 1991, S. 153, Hervorhebung C. W.]. Dies wird nicht nur in der konstruktiven Leistung beim Aufbau von Vorstellungsbildern erlebbar. Gerade auch das Vorstellungshandeln mit und an Vorstellungsbildern steht Selbstevidenz entgegen.

manns verstanden als ein Bereich, der „möglichst reichhaltige Ansatzpunkte für eine Anwendung bekannter Schemata“ (S. 93) bietet, dann lässt sich dem Missverständnis entgegenwirken. Wird die Anwendung bekannter Schemata im Kontext von Vorstellungsübungen als gedanklich verfügbare Bilder und Handlungen gedeutet, lässt sich die erste inhaltliche Grenze des Unterrichtsinstruments wie folgt beschreiben: *Nur wenn sich ein mathematischer Sachverhalt* anschaulich *als Folge von gedanklich verfügbaren Bildern und Handlungen beschreiben lässt, eignet er sich für eine mathematische Vorstellungsübung.*

Diese Grenze ist nicht als Zurückweisung formal-axiomatisierter Darstellungen mathematischer Inhalte zu missverstehen, was einer Ignoranz der Fachwissenschaft und der Mathematikgeschichte gleichkäme. Vielmehr wird mit dieser Arbeit dafür plädiert, Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen in den Unterricht mit einzubeziehen, und zwar als Erfahrungsgrundlage, von der aus eine reflektierte und lernwirksame Auseinandersetzung mit Formalisierungen erst möglich wird.[3]

6.1.2 Kognitive Komplexität

Auch aus einem weiteren Grund lassen sich nicht alle unterrichtsmathematischen Inhalte durch Vorstellungsübungen thematisieren. Da in der ersten Phase, in der der Text einer Vorstellungsübung vorgelesen wird, keine darstellerischen Hilfsmittel (Modelle, Notizen oder Skizzen) herangezogen werden können, darf der Text nur so viel kognitive Komplexität erfordern, wie von den Schülerinnen und Schülern aktuell bewältigt werden kann. Er muss gedanklich noch überschaubar – und damit gedanklich handhabbar – bleiben. Wo diese Grenze der kognitiven Komplexität im Einzelfall auch liegen mag, gewiss ist sie in Vorstellungsübungen *tiefer* anzusetzen als in anderen Texten des Mathematikunterrichts, wo zusätzliche Medien zur Entlastung des Gedächtnisses herangezogen werden.[4]

[3] Siehe auch [Bauer 1978, S. 119 f.]. – Bei [Bannert & Schnotz 2006, S. 79] werden verschiedene Forschungsarbeiten genannt, die untersuchen, wie anschaulich ein Text verfasst sein muss, um Vorstellungen evozieren.

[4] Diese Grenze wird unter anderem durch die Gegebenheiten des menschlichen Gedächtnisses bestimmt. So ist davon auszugehen, dass im Kurzzeitgedächtnis erwachsener Menschen maximal 7 ± 2 *Informationseinheiten* (sog. „chunks“, die ihrerseits aus mehreren kleineren Informationselementen bestehen können) gleichzeitig gedanklich verfüg- und bearbeitbar sind [Weinert 1996, S. 10 f.]. Was diese Beschränkung für die gedankliche Bearbeitung *mathematischer Probleme* bedeuten kann, zeigt [Schoenfeld 2000, S. 644] am Beispiel der Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen.

Damit lautet die zweite inhaltliche Grenze mathematischer Vorstellungsübungen folgendermaßen: *Nur wenn sich ein mathematischer Sachverhalt ohne Überschreitung einer gewissen kognitiven Komplexität beschreiben lässt, eignet er sich für eine mathematische Vorstellungsübung.*[5]

6.2 Schwierigkeiten mit Vorstellungsübungen

In der Akzeptanzumfrage nannten einige Schülerinnen und Schüler auf die Frage nach Verärgerungen durch das Unterrichtsinstrument gewisse Vorstellungsschwierigkeiten. Auch gab die Art und Weise, wie die Lehrperson sowie die Klasse mit den Vorstellungen und Vorstellungsweisen anderer umgehen, vereinzelt zu Verärgerungen Anlass (siehe Tab. 3.5, S. 63). Damit liegen Hinweise vor, dass Vorstellungsübungen nicht für alle Schülerinnen und Schüler ein geeignetes Instrument zum Lernen und Bearbeiten von Mathematik sind – ganz davon zu schweigen, dass singuläre Vorstellungen auch hinderlich sein können.

Würden Schwierigkeiten wie die genannten ignoriert, wäre auch eine Auseinandersetzung mit dem Inhalt der Vorstellungsübung kaum möglich. Die intendierten mathematischen Prozesse und erwarteten Effekte ließen sich nur schwer erreichen, oder die Verärgerung bezöge sich gar auf das Unterrichtsinstrument als solches. Mit anderen Worten: Schwierigkeiten sind zu akzeptieren, müssen aber durch die Unterrichtsumgebung aufgefangen werden.

Deshalb werden in diesem Abschnitt die beiden genannten Schwierigkeiten diskutiert, die Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit Vorstellungsübungen erleben. Da sie eher individueller Natur sind als die bereits besprochenen inhaltlichen Grenzen, werden Modifikationen der Unterrichtsumgebung vorgeschlagen, die möglicherweise in der Lage sind, solche Schwierigkeiten aufzufangen.

6.2.1 Vorstellungsschwierigkeiten

Vorstellungsübungen sind unter anderem deshalb kognitiv anspruchsvoll, weil sie jeglicher darstellender Hilfsmittel entbehren. Entsprechend ärgern sich

[5] Was das heißt, hängt auch vom *kognitiven Entwicklungsstand* der Lernenden ab. Vermutlich ist er verantwortlich für die geschilderten negativen Erfahrungen mit Vorstellungsübungen in der DMS (S. 37). Ältere und ‚bessere' Lernende wie Gymnasiastinnen und Gymnasiasten sind imstande, komplexere „chunks" zu bilden. Deshalb müssten Vorstellungsübungen für Schülerinnen und Schüler der DMS oder der Sekundarstufe I anders aussehen. Zur Forderung nach „Stufengemäßheit" siehe auch S. 94.

Lernende am meisten, wenn sie sich einen beschriebenen Sachverhalt nicht vorstellen können:[6]

- *„[...] Sie regen mich auf, wenn ich die Bilder in meinen Gedanken nicht sehe [...].“* (Schülerin, Klasse GB 11)
- *„[...] ich ärgere mich nur, wenn ich etwas wegen der Formulierung nicht verstanden habe.“* (Schülerin, Klasse GB 10)
- *„Ich kann keine Teile im Kopf zu einem Ganzen verbinden, sondern nur ‚ganze‘ Körper betrachten. Das ärgert mich ...“* (Schülerin, Klasse GB 10)

Dafür, dass Schülerinnen und Schüler die intendierten Vorstellungen nicht aufbauen oder nicht mit ihren Vorstellungen handeln können, sind vielfältige Ursachen denkbar. Zum einen kann es sein, dass eine Vorstellungsübung die genannten Grenzen der Anschaulichkeit und der kognitiven Komplexität ignoriert. Zum anderen kann der Hintergrund, auf den sich die Vorstellungsanweisungen beziehen, nicht aktivierbar oder nicht vorhanden sein. Die Vorstellungsanweisungen werden folglich nicht hinreichend verstanden. Ebenfalls kann vorkommen, dass sich Schülerinnen und Schüler nicht genügend auf die Vorstellungsanweisungen konzentrieren können, etwa aus Zeitmangel oder weil ihnen bestimmte Vorstellungen hinderlich sind und sich nicht zurückdrängen lassen. Im Endeffekt können die Schülerinnen und Schüler sowohl die intendierten als auch ihre singulären Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen nicht konstruieren – sie sprechen davon, „stecken zu bleiben“ oder „aus der Kurve zu fallen“.

Aber noch ein ganz anderer Grund kann für den Eindruck verantwortlich sein, sich etwas nicht vorstellen zu können. Gespräche mit Schülerinnen und Schülern deuten darauf hin, dass sie – vor allem zu Beginn eines Einsatzes von Vorstellungsübungen – von ihren Vorstellungen erwarten, dass sie ‚gestochen scharf‘ sind und auf einer Art ‚innerem Display‘ erscheinen. Die Verschwommenheit, die gerade für singuläre Vorstellungen typisch ist, erweckt immer wieder nur wenig Vertrauen in die eigenen Vorstellungen. Gerade Schülerinnen und Schüler mit hohen Ansprüchen an eigene Leistungen tendieren dann zur Einschätzung, sie könnten sich „nichts vorstellen“.[7]

[6] Alle in diesem Abschnitt zitierten Schüleraussagen wurden bereits im Kapitel 3 genannt.

[7] Ein Zusammenhang von Vorstellungsschwierigkeiten und Wahrnehmungsschwierigkeiten kann an dieser Stelle nur vermutet werden. Es ist denkbar, dass Schwierigkeiten beim Aufbau von Vorstellungen auf Schwierigkeiten bei der visuellen Wahrnehmung zurückgehen.

Vorstellungsschwierigkeiten lassen sich auch durch unterschiedliche *Denkstile* verstehen. Mit Schwanks Unterscheidung zwischen prädikativen und funktionalen Präferenzen könnte es sein, dass Personen, die den einen, prädikativen Denkstil präferieren, eher Mühe haben, Vorstellungen zu konstruieren, zu bearbeiten und zu bewegen als Personen, die den anderen, funktionalen Stil präferieren.[8] Wenn die Affinität zum Einsatz von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen mit einem bestimmten Denkstil einhergehen sollte, dann lässt sich auch umgekehrt schlussfolgern, dass die Tatsache von Vorstellungsschwierigkeiten auf einen bestimmten Denkstil verweist.[9]

Allerdings spricht Schwank nicht von der Fähigkeit, sondern von der *Präferenz* einer Person, also davon, welchen Denkstil sie bevorzugt, wenn sie ohne entsprechende Vorgaben von außen ein mathematisches Problem bearbeitet. Das heißt, dass eine Person, selbst wenn sie den prädikativen Denkstil präferiert, durchaus Gedankengänge nachvollziehen kann, die in einem funktionalen Stil abgefasst sind – zumal wenn diese in anschaulicher Form präsentiert werden. Das entspricht auch meinen eigenen Beobachtungen: Schülerinnen und Schüler bleiben nur selten stecken.[10]

Damit könnten Vorstellungsschwierigkeiten einer Person darauf hinweisen, dass Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen zumindest *nicht zu ihren bevorzugten Denkwerkzeugen* gehören. Wie jedoch aus dem Abschnitt zu den fachlichen Effekten hervorgeht, wird erwartet, dass Vorstellungsübungen – unabhängig vom präferierten Denkstil – *die Präferenz erhöhen*, Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen im Sinne einer heuristischen Strategie zum Vergegenwärtigen und Experimentieren einzusetzen (S. 204 f.).[11]

Die Tatsache, dass Schwierigkeiten auftreten, stellt nicht das Unterrichtsinstrument an und für sich in Frage. Vielmehr sind hier als pädagogische Konsequenz Vorschläge gefordert, wie diesen Vorstellungsschwierigkeiten beizukommen wäre. Welche *Modifikationen* der Unterrichtsumgebung sind denkbar, damit Vorstellungsschwierigkeiten nicht zu Verärgerungen führen?

[8] Zum Konzept prädikativen und funktionalen Denkens siehe S. 102 f.

[9] Auch Borromeo-Ferris Studie, die zwischen der Präferenz eines visuellen Denkstils (bildhaft, oft beweglich), eines analytischen Denkstils (verbal-symbolisch, formal) und eines konzeptuellen Denkstils (klassifizierend) unterscheidet, lässt diese Vermutung zu. ([Borromeo-Ferri 2002], [Borromeo-Ferri 2003] und [Burton 1999, S. 95])

[10] Auch die „imagery debate“ in der Kognitionspsychologie (Spielen Vorstellungen in kognitiven Prozessen eine funktionale Rolle oder sind sie nur ein Epiphänomen?) kann als Ausdruck unterschiedlicher Denkstile (visuell vs. analytisch-konzeptuell) gelesen werden (siehe die Fußnote zur Kognitionspsychologie auf S. 108).

[11] Die hier angeschnittene Frage, welche Lernenden besonders von dem Unterrichtsinstrument profitieren, wird in den Forschungsperspektiven (S. 244 ff.) aufgegriffen.

Die Unterrichtsumgebung in der vorliegenden Fassung ist so konstruiert, dass Schülerinnen und Schüler nicht sofort rückfragen können, wenn sie Vorstellungen nicht aufbauen können und stecken bleiben. Es bleibt ihnen nichts anderes übrig als abzuwarten, bis die Phase der Vorstellungen vorbei ist. Erst in der Phase der Besprechung erhalten sie die Gelegenheit, klärend nachzufragen.

Wenn Schülerinnen und Schüler Vorstellungsschwierigkeiten haben, öffnen sie in der Regel die Augen, werden unruhig und beginnen, sich zu bewegen. Diese nonverbale Ausdrucksweise kann von der Lehrperson bemerkt werden. Deshalb könnte schon das Instrument in der vorliegenden Fassung so modifiziert werden, dass Schülerinnen und Schüler in der Phase der Vorstellungen gezielt *anzeigen*, wenn sie den Anweisungen nicht mehr Folge leisten können, und zum Beispiel eine Hand heben. Damit würden sie signalisieren, dass sie die eben angewiesenen Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen nicht konstruieren konnten, ohne damit ihre Mitschülerinnen und Mitschüler zu stören. Die Person, die die Übung anleitet, erführe, dass sie die letzte Vorstellungsanweisung wiederholen muss, allenfalls mit anderen Worten. Lernende mit Vorstellungsschwierigkeiten erhielten eine zusätzliche Möglichkeit, Vorstellungen aufzubauen, Lernende ohne Schwierigkeiten könnten aufgebaute Vorstellungen überprüfen.

Besonders im Falle von inhaltlich mehrstufig aufgebauten Vorstellungsübungen wie etwa „Hilberts Hotel" (S. 28 f.) bzw. dem „geschlossenen oder offenen Universum" (S. 30 f.) bietet sich zur Vermeidung von Vorstellungsschwierigkeiten an, die Vorstellungsphase mehrfach zu *unterbrechen* und kurze Phasen der klärenden *Besprechung* einzuschieben. Diese können das Verständnis der angewiesenen Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen sichern. Auch der Einsatz von darstellenden Hilfsmitteln (Skizzen, Modelle) ist dabei denkbar.[12] Anschließend könnten Schülerinnen und Schüler in die aktuelle Vorstellungsübung zurückgeführt werden. Schließlich könnte den Lernenden der schriftliche Text der Vorstellungsübung zur Verfügung gestellt werden, damit sie die Gründe für ihre Schwierigkeiten ausmachen und so ihre Vorstellungsschwierigkeiten auflösen können.

Ein weiterer Vorschlag zum Umgang mit Vorstellungsschwierigkeiten setzt schriftliche Dokumente von Schülerinnen und Schülern voraus – und damit den Ausbau der Unterrichtsumgebung. Mehr dazu in Abschnitt 6.3.1.

[12] Mit Galperin liegt hier ein „Zurückgehen in der Ebene der Handlung" vor (S. 94 ff.).

6.2.2 Schwierigkeiten des Veröffentlichens von Vorstellungen

Einzelne Schülerinnen und Schüler teilen ihre Vorstellungen nur ungern der ganzen Klasse mit. Für sie ist entscheidend, wie die Klasse bzw. die Lehrperson reagiert. Darauf weist eine Schülerin in der Akzeptanzbefragung hin, wenn sie auf die Frage nach Gründen für etwaige Verärgerungen schreibt:

- *„Wenn zuviel darüber geredet wird. Jeder hat seine eigenen Gedanken!“* (Schülerin, Klasse GB 12.1)

Je weniger eine Klasse mit mathematischen Vorstellungsübungen vertraut ist, desto mehr stellt das Veröffentlichen von eigenen singulären Vorstellungen eine Schwierigkeit dar. Darüber hinaus handelt es sich – wie bereits in Abschnitt 3.1 (S. 37) beschrieben – bei zurückhaltenden Personen eher um Schüler als um Schülerinnen. Lernende, die sich im Verlauf der ersten Vorstellungsübungen zurückhalten und beobachten, welche singulären Vorstellungen ‚klassenfähig‘ sind (und welche nicht) und in welche Richtung sich die Gespräche über Vorstellungen entwickeln, sind primär männliche Personen.

Dass Lernende nicht über eigene singuläre Vorstellungen berichten wollen oder sie nicht mit anderen singulären Vorstellungen vergleichen möchten, könnte damit zu tun haben, dass mit den Vorstellungen auch die eigene Innenwelt und damit die eigene Person zur Sprache steht, die gerade in der Pubertät und frühen Adoleszenz nicht nur als solche entdeckt, sondern oft genug als problematisch erlebt wird.[13]

Der Schwierigkeit, eigene Vorstellungen zu veröffentlichen und der Klasse mitzuteilen, kann mit einem *respektvollen Umgang* begegnet werden. Wie schon mehrfach erwähnt, sind Vorstellungen nicht primär unter dem Aspekt von ‚Richtig‘ und ‚Falsch‘ zu betrachten, sondern vor allem im Hinblick auf ihr produktives Potenzial. Respektvoller Umgang heißt aber auch, dass Schülerinnen und Schüler nicht zur Teilnahme an Vorstellungsübungen gezwungen werden dürfen, zum Beispiel durch Bewertung.[14]

[13] Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass die Unterrichtsumgebung für jüngere Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I – in die ihre Pubertät fällt – anders aussehen müsste.

[14] Was gegenseitiger Respekt für einen Unterricht heißt, der auf echten Dialogen basiert, wird in [Hefendehl-Hebeker 2004 a, S. 46, 48] entwickelt.

Zu einem respektvollen Umgang mit singulären Vorstellungen gehört ebenfalls, dass Schülerinnen und Schülern keine fachlich-regulären Vorstellungen ‚übergestülpt' werden. Wie dies vermieden werden kann, zeigt Lengninks Unterrichtskonzept des reflektierenden Aufbaus von Vorstellungen. Hier werden im Klassengespräch sowohl *Gemeinsamkeiten* als auch *Unterschiede* zwischen intendierten regulären und vorhandenen singulären Vorstellungen herausgearbeitet und miteinander in Beziehung gesetzt (siehe Abschnitt 4.2.3, S. 123 ff.). Im Endeffekt müssen Schülerinnen und Schüler ihre singulären Vorstellungen weder aufgeben noch bei ihnen stehen bleiben, sondern sie erkennen vielmehr deren Stärken und Schwächen. So reicht es aus zu wissen, dass sich bei der Vorstellung einer rutschenden Leiter die Vorstellung einer *falsch* gekrümmten Kurve einstellt, um mit dem Vorstellungsbild einer *links*gekrümmten Leuchtkurve arbeiten zu können (S. 165 ff.). Auf diese Art und Weise können *singuläre Vorstellungen neben fachlich regulären Vorstellungen existieren und als produktiv erlebt werden.*[15]

6.3 Ausbau des Unterrichtsinstruments

Mathematische Vorstellungsübungen sind durch ihre pädagogische Entscheidung, *Singuläres* von Lernenden und Lehrenden *ins Zentrum zu stellen* und *explizit zu machen*, mit dem Unterrichtsarrangement der Dialogischen Didaktik verwandt. Während Vorstellungsübungen ein Unterrichtsinstrument neben anderen darstellen, wird Singuläres in der Dialogischen Didaktik als *Ausgangspunkt für nachfolgende Lernprozesse* genutzt und steht damit an prominenter Stelle in einem Ablauf, der den ganzen Unterricht umfasst.

In diesem Abschnitt wird entworfen, wie sich die Unterrichtsumgebung durch eine schriftliche Phase ergänzen lässt, um in einem weiteren Schritt in einem nach der Dialogischen Didaktik konzipierten Unterricht eingesetzt werden zu können. Dadurch würden Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zum einen für umfassendere Nutzungsmöglichkeiten seitens der Lernenden als auch der Lehrpersonen verfügbar gemacht, zum anderen würde die Einstiegsschwelle in einen dialogischen Unterricht gesenkt.[16]

[15] Oser spricht in diesem Zusammenhang von *negativem Wissen*. Er beschreibt es als Wissen davon, was etwas nicht ist, wie etwas nicht funktioniert, welche Strategien nicht zur Lösung führen und warum bestimmte Zusammenhänge nicht stimmen. [Oser 2005, S. 26]

[16] Der entworfene Ausbau des Unterrichtsinstruments kann im Rahmen dieser Arbeit nicht erprobt werden. Er wird deshalb im Abschnitt der Forschungsperspektiven wieder aufgegriffen (Abschnitt 7.2, S. 245 f.).

6.3.1 Vorstellungsübungen und Schriftlichkeit

In der Phase der Besprechung kann die ausschließlich mündliche Mitteilung von Vorstellungen wegen ihres singulären Charakters recht vage und unverbindlich bleiben. Auch verfremden sich eigene Vorstellungen im Gespräch mit Mitschülerinnen und Mitschülern, sie passen sich den anderen Schilderungen an oder verflüchtigen sich gar. Darüber hinaus erläutern durch zeitliche und gruppendynamische Rahmenbedingungen immer nur einige Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen, während sich andere in dieser Phase nicht zu Wort melden.

Deshalb erscheint es sinnvoll, die singulären Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen aller Lernenden zusätzlich zu explizieren, um sie festzuhalten und verfügbar zu machen. Ein erster Schritt zum Ausbau der Unterrichtsumgebung – die bis jetzt aus den Phasen der Vorstellungen und der Besprechung bestand – kann in der Verschriftlichung bestehen. So wird zwischen die beiden bisherigen Phasen eine *Phase der Verschriftlichung* gefügt, wie Abbildung 6.1 zeigt.

Abb. 6.1: Ausbau der Unterrichtsumgebung durch eine Phase der Verschriftlichung

Um die Gefahr der Verfremdung eigener singulärer Vorstellungen durch andere klein zu halten, findet diese Phase noch vor der Phase der Besprechung statt. Hier dokumentiert jede Schülerin und jeder Schüler die je *eigenen Vorstellungsprozesse*, aber auch je eigenen *Vorstellungsschwierigkeiten*. Individuellen Vorlieben gemäß und begünstigt durch den Vorstellungskontext muss dies nicht zwangsläufig in eine *sprachliche* Form (Texte) münden, sondern kann sich ebenso gut in *zeichnerischer* Form (Skizzen) niederschlagen („Ich habe mir das so vorgestellt!"). Durch die sprachliche bzw. zeichnerische Darstellung der eigenen Vorstellungen werden diese zuerst einmal *unverfälscht gesichert*. Und vermutlich werden sie dadurch auch besser *expliziert* als bisher, und zwar nicht nur für die Lernenden selbst, sondern auch für die Mitschülerinnen und -schüler – und nicht zuletzt für die Lehrkräfte.

Auf der Grundlage dieser schriftlichen Dokumente lassen sich in der Phase der Besprechung produktive wie auch hinderliche Vorstellungen besser und auch eigenständiger *untersuchen* („Welche meiner Vorstellungen waren produktiv? Welche meiner Vorstellungen waren hinderlich und warum?"). Auch der Vergleich mit den Vorstellungen von Mitschülerinnen und Mitschülern („Wie stellst du dir das vor?") und die Weiterentwicklung eigener Vorstellungen („Welche deiner Vorstellungen wären für mich produktiv gewesen?") ist dank der Schriftlichkeit umfassender möglich und vermutlich auch ergiebiger. *Insgesamt dürfte die Verschriftlichung eine intensivierte Auseinandersetzung mit den konstruierten Vorstellungen – den eigenen und den anderen – ermöglichen.*[17]

Durch die Verschriftlichung sind singuläre Vorstellungen präziser reflektier- und entwickelbar. Dies dürfte insbesondere der Qualität der aufgebauten Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen zugute kommen. Damit würde der erste erwartete, fachliche Effekt des Einsatzes von Vorstellungsübungen – der Aufbau mathematisch produktiver Vorstellungen (S. 202 f.) – profitieren. Wie sehr der zweite erwartete Effekt – die Verwendung von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen als Heurismus (S. 204 f.) – von einer eingefügten Schreibphase profitieren kann, muss an dieser Stelle spekulativ bleiben. Es ist aber denkbar, dass für die Lernenden durch einen präziseren und reflektierteren Aufbau von Vorstellungen sowohl das *Potenzial* als auch die *Grenzen* ihrer Verwendung klarer hervortreten könnten.[18]

Wie bereits zum Schluss des Abschnitts 6.2.1 angesprochen, ermöglichen die schriftlichen Dokumente der Schülerinnen und Schüler auch, anders mit Vorstellungsschwierigkeiten umzugehen.

In der Phase der Verschriftlichung wird auch dokumentiert, welche Vorstellungsschwierigkeiten entstanden sind. Ihre *Entstehung* ist jedoch eher schwer zu fassen, da man in der Phase der Vorstellungen damit beschäftigt ist, den Vorstellungsanweisungen zu folgen und Vorstellungen zu konstruieren, und die genauen Formulierungen der Anweisungen leicht vergisst. Wird deshalb in der Phase der Verschriftlichung immer auch der Text der Vorstellungsübung ausgeteilt, erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, die Vorstel-

[17] Das schriftliche Dokumentieren schafft auch eine stärkere Verbindlichkeit von Gedanken. Darin liegt ein zusätzlicher Wert für das Lernen. Außerdem geht mit dem Schreiben eine Verlangsamung der Gedanken einher. Auch dies kann dem Verstehen zuträglich sein. Schließlich erlauben individuelle Textproduktionen eine Binnendifferenzierung, da beim Schreiben das Tempo und die sprachlichen Mittel selbst bestimmt werden. [Siebel 2005, S. 186–189] (Siehe auch [Maier & Schweiger 1999, S. 187 f.] sowie [Kruse & Ruhmann 2006, S. 22 ff.].)

[18] Schülerdokumente lassen sich auch zur *Evaluation* von Unterrichtsinstrumenten nutzen. So könnten sie zur Überprüfung der fachlichen Effekte (S. 202 ff.), aber auch zur Eruierung der Nutzung und Nutzungsakzeptanz (S. 40 ff.) herangezogen werden. Genaues dazu findet sich in den Forschungsperspektiven in Abschnitt 7.2 (S. 246 ff.).

lungsanweisungen in einem angemessenen Tempo selbst lesen und nachvollziehen zu können. In – wiederum schriftlicher – Einzelarbeit können sie die Stelle ihrer Blockade lokalisieren (beispielsweise welches Wort nicht verständlich war) oder ihre Vorstellungsschwierigkeiten präzisieren.

Damit vermindert sich der Druck, den Vorstellungsanweisungen schon beim ersten Hören Folge leisten zu müssen. Zum anderen steht für die anschließend einsetzende Besprechungsphase über die tatsächlich konstruierten Vorstellungen hinaus auch eine detaillierte Dokumentation und eine erste Analyse der eigenen Vorstellungsschwierigkeiten zur Verfügung, die sich besprechen und reflektieren lässt.[19]

Die im Rahmen von Vorstellungsübungen verfassten Dokumente lassen sich natürlich auch *bewerten* und sogar *benoten*. So kann etwa, wie schon mit der „Häkleinmethode" [Ruf & Gallin 1998 a, S. 80 ff.] in der Dialogischen Didaktik praktiziert, die Intensität der persönlichen Auseinandersetzung mit den eigenen und anderen Vorstellungen bewertet und in eine Note umgerechnet werden. Im Fall von Vorstellungen ist einer Benotung gegenüber jedoch Skepsis angebracht.

Dazu sei kritisch angemerkt, dass Noten zur Selektion in die Schule eingeführt wurden und bis heute (nicht nur von Lernenden) entsprechend erlebt werden. Ob notenrelevante Bewertungen der individuellen Förderung – und darum geht es bei Vorstellungsübungen in der jetzigen Form ja – dienen, wird kontrovers diskutiert. In diesem Zusammenhang spricht Timo Leuders von einer paradoxen „Vielfachverzweckung" [Leuders 2004, S. 64] und gibt für Unterrichtselemente, welche die *Entstehung und Entwicklung* mathematischer Erkenntnis bezwecken, zu bedenken: „In einem transparenten Kontext des Entdeckens und Erfindens sollte eine externe Leistungsbewertung der mathematischen Richtigkeit nach Möglichkeit unterbleiben. Produkte und Prozesse dürfen allenfalls nach ihrer Divergenz, also nach ihrer kreativen Vielfalt oder Originalität bewertet werden [...]" [ebd., S. 67]. Deshalb stellt er sich gegen jegliche Bewertung von Dokumentationen *individueller Verstehensprozesse* – was dokumentierte Vorstellungen ja letztlich sind [ebd., S. 69–78].[20]

[19] Schülerinnen und Schüler ohne Vorstellungsschwierigkeiten können stattdessen die mathematische Frage variieren oder weitere mathematische Fragen stellen und bearbeiten.

[20] Die Frage, inwiefern eine notenrelevante Bewertung im Falle von Vorstellungsübungen sinnvoll oder auch problematisch sein kann, wurde bereits im Abschnitt 2.1.2 (S. 20) angeschnitten. Ähnliche Einwände siehe bei [Weinert 1997, S. 21] und [Winter 2004, S. 269 f.].

6.3.2 Vorstellungsübungen und Dialogische Didaktik

Durch die Verschriftlichung werden singuläre Vorstellungen nicht nur den Lernenden, sondern auch den Lehrpersonen in einem breiteren Maße zugänglich und können mit fachlich-regulären Vorstellungen konfrontiert werden. Wie Vorstellungsübungen Lehrerinnen und Lehrer dabei unterstützen können, einen Kurswechsel von einem monologischen zu einem dialogischen Mathematikunterricht einzuleiten, wird in diesem Abschnitt ausgeführt.

Bis jetzt ist die Unterrichtsumgebung so konstruiert, dass die Lehrperson die durch die Vorstellungsübung aktivierten singulären Vorstellungen weniger für den weiteren Unterricht nutzt als vielmehr auf ihren fördernden Wert für die einzelnen Schülerinnen und Schüler vertraut. Die Lehrperson erfährt zwar in der Phase der Besprechung etwas über die Vorstellungen und Vorstellungsweisen der sich artikulierenden Schülerinnen und Schüler. Selbst wenn sie sich im weiteren Unterricht auf diese Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen bezieht, geschieht dies jedoch nur punktuell, denn sie befragt die Vorstellungen nicht auf ihre Auswirkungen ins Reguläre. Damit besteht ein gewisses Risiko, dass durch Vorstellungsübungen aktiviertes und evoziertes Singuläres den einzelnen Personen überlassen und dadurch mehr oder weniger singulär bleibt.

Zudem wird von der konstruktivistisch orientierten Unterrichtsforschung gefordert, dass die Angebote von Lehrpersonen auf den tatsächlich vorhandenen Wissensstand der Lernenden auszurichten sind, um optimal genutzt werden zu können.[21] Entsprechend nutzt die Dialogische Didaktik Singuläres zu einem „Austausch unter Ungleichen", bezogen auf Lernende und Lehrende [Ruf & Gallin 1998 a, S. 257]. Wie bereits in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, nimmt dieses didaktische Arrangement seinen Ausgang in einer Kernidee der Lehrperson, die in einen schriftlichen Auftrag an die Lernenden mündet. Aufträge sollen dazu anregen, sich mit fachlichen Inhalten auf eigene, singuläre Art und Weise auseinanderzusetzen und diesen damit authentisch zu begegnen. Die Dialogische Didaktik bleibt jedoch nicht bei der Evozierung von Singulärem stehen. Es ist eines ihrer charakteristischen Merkmale, dass sie das weitere Unterrichtsgeschehen aus den verschriftlichten singulären Standortbestimmungen und Herangehensweisen entwickelt. Indem die Lehrpersonen Rückmeldungen auf die in Lernjournalen festgehaltenen singulären Positionen verfassen, wird Singuläres zum fundamentalen Ausgangspunkt eines

[21] Zur Bedeutung der Passung zwischen dem Angebot der Lehrperson und der Nutzung durch die Lernenden siehe etwa [Fend 1998] oder [Helmke 2004, S. 76 f.].

Lerndialogs: „Lernen wird begriffen als Wechselspiel von Produktion und Rezeption, das von den Lernenden gleichermaßen geprägt und gelenkt ist wie von den Lehrenden." [Ruf & Gallin 1998 a, S. 14] Dadurch wird der Kreislauf eines dialogischen Unterrichts in Gang gesetzt und aufrechterhalten (siehe Abb. 4.4, S. 120).

In Analogie dazu eignen sich Vorstellungsübungen aus Sicht der Lehrperson nicht nur zur Sichtbarmachung der Vorstellungen einer Klasse, sondern darüber hinaus dazu, diese Vorstellungen aufzugreifen und den weiteren Unterrichtsverlauf daraus zu entwickeln.

Wie beim Unterricht nach Dialogischer Didaktik stehen auch bei Vorstellungsübungen am Anfang *Kernideen*, das heißt singuläre, aus fachlicher Sicht richtige Vorstellungen. So steht hinter den Vorstellungsanweisungen zum Ikosaeder die Kernidee zweier Hände mit je fünf ineinandergreifenden Fingern (S. 152 ff.), und hinter der Begründung zum Wert der konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ steht die Kernidee einer Folge von Balanceakten (S. 178 ff.). Deshalb liegt es nahe, Texte von Vorstellungsübungen als Instrument der Dialogischen Didaktik einzusetzen und sie als – zunächst ungewohnt aufbereitete und mündlich präsentierte – neue Form von *Aufträgen* in den Kreislauf der Dialogischen Didaktik zu stellen. Für eine graphische Darstellung dieses Ausbaus siehe Abbildung 6.2.

Damit setzen sich die Schülerinnen und Schüler in der bereits konzipierten Phase der Verschriftlichung – wie nach einem klassischen Auftrag – mit einer mathematischen Frage auseinander („Ich mache das so!"). Zusätzlich bearbeiten sie im Lernjournal (wie im letzten Abschnitt ausgeführt) die am Ende der Phase der Vorstellungen ebenfalls gestellte Frage nach den singulären Vorstellungen und Vorstellungsabläufen („Ich stelle mir das so vor!"). Der Lehrperson stehen damit Schülertexte zur Verfügung, dank deren sich – etwa für Rückmeldungen in Form einer Autographensammlung – die singulären Vorstellungen ihrer Schülerinnen und Schüler klassifizieren und nachfolgend besprechen lassen. In einem Folgeauftrag lassen sie sich ganz gezielt regulären Vorstellungen gegenüberstellen. Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen singulären und regulären Vorstellungen können wie bereits beschrieben herausgearbeitet werden (S. 224). Der Folgeauftrag könnte aber auch eine inhaltliche Erweiterung der Vorstellungsübung präsentieren und gegebenenfalls wiederum als Vorstellungsübung formuliert sein (in Abb. 6.2 durch die gestrichelten Kurvenstücke angedeutet).

Durch die Einbettung von Vorstellungsübungen in einen nach der Dialogischen Didaktik gestalteten Mathematikunterricht lassen sich also nicht nur

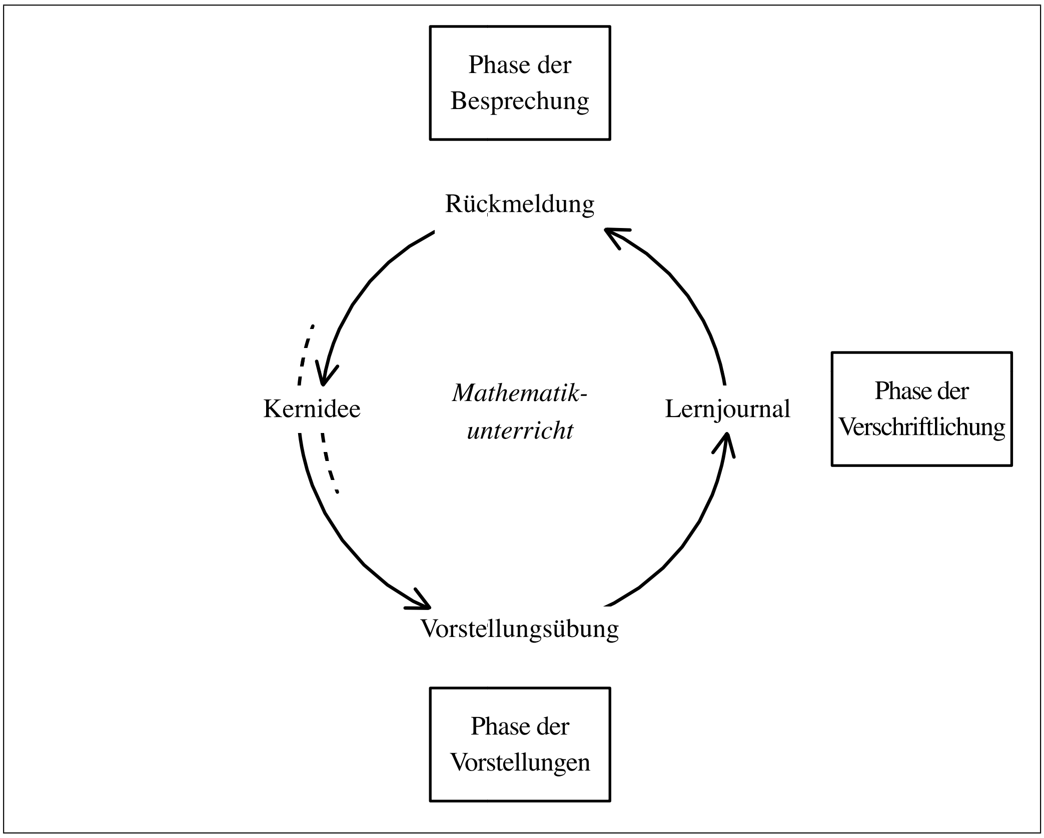

Abb. 6.2: Vorstellungsübungen im Kreislauf eines Dialogischen Mathematikunterrichts

genauere Kenntnisse über die Nutzung der Vorstellungsübungen gewinnen. Diese Interpretation kann dialogisch Lehrenden darüber hinaus dazu dienen, die verschriftlichten singulären Vorstellungen ihrer Schülerinnen und Schüler *als Darstellung des Vorwissens* und damit für den *weiteren Unterrichtsfortgang* zu nutzen.

Umgekehrt kann aber auch ein dialogischer Unterricht von der Verwendung von Vorstellungsübungen profitieren. Wie bereits ausgeführt wurde, stellt ja die Erwartung, dass Lernende bereit und fähig sind, ihre singuläre Auseinandersetzung mit einer mathematischen Frage zu thematisieren und sich schreibend auch mit fehlgeschlagenen Lösungsversuchen zu befassen, eine Einstiegsschwelle in das dialogische Lernen dar (S. 123).

Deutlicher als Lösungsversuche mathematischer Fragen werden Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen, die im Zusammenhang mit mathematischen Fragen aufgebaut werden, als *singulär* erlebt. Durch Vorstellungsübungen setzen sich Lernende – im Gegensatz zu herkömmlichen schriftlichen

Aufträgen – nicht nur auf einer fachlichen Ebene, sondern auch auf der Ebene ihrer Vorstellungen mit Mathematik auseinander. Dadurch werden sie zum einen auf den Reichtum ihrer singulären Vorstellungen aufmerksam gemacht, zum anderen erfahren sie, dass singuläre Vorstellungen beschreib- und kommunizierbar sowie im Umgang mit Mathematik nützlich sein können. *Damit liegt bei einer Verwendung von Vorstellungsübungen die Einstiegsschwelle in einen dialogischen Mathematikunterricht, in dem Texte über Singuläres produziert werden, tiefer als bei der Verwendung von herkömmlichen Aufgaben oder Aufträgen.*

Teil III

Zusammenfassung

7 Ertrag und Forschungsperspektiven

In dieser Studie exploriere ich eine mathematikdidaktische Innovation. Das Unterrichtsinstrument mathematischer Vorstellungsübungen, das ich für den eigenen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II entwickelt und jahrelang eingesetzt habe, wird hier nach der Methode der Aktionsforschung reflektiert.

Dazu wird das Unterrichtsinstrument im zweiten, auf die Einleitung folgenden Kapitel beschrieben. Nach einer Skizzierung der Unterrichtsumgebung werden exemplarisch acht Vorstellungsübungen geschildert und in vier unterschiedliche Typen von Vorstellungsübungen gegliedert. In Kapitel 3 wird eine kleine empirische Untersuchung, welche die Akzeptanz des Unterrichtsinstruments zum Gegenstand hat, vorgestellt und quantitativ als auch qualitativ ausgewertet. Sie stellt eine erste Reflexion des Unterrichtsinstruments dar. Kapitel 4 bis 5 machen den Hauptteil der Arbeit aus. Hier werden die Unterrichtsumgebung und die dargestellten Vorstellungsübungen vor dem Hintergrund naheliegender mathematikdidaktischer Konzepte positioniert sowie unter Bezugnahme auf Forschungsergebnisse aus Bezugswissenschaften theoretisch fundiert. Auf dieser Grundlage werden die acht dargestellten Vorstellungsübungen ausführlich daraufhin analysiert, welche Vorstellungen sie hervorrufen und welche mathematischen Prozesse dabei angesprochen werden. Im Kapitel 6 werden Grenzen des Unterrichtsinstruments ausgelotet sowie Vorschläge für seine Weiterentwicklung und für seine weiterführende Nutzung im Unterricht gemacht.

Folglich besteht das mit dieser Arbeit verfolgte Erkenntnisinteresse darin, das implizite Konzept, das dem Unterrichtsinstrument zugrunde liegt, unter Rückbezug auf geeignete mathematikdidaktische, pädagogische und psychologische Theorien zu fundieren, begrifflich zu fassen und dadurch diskutierbar zu machen. Hier werden weder allgemein gültige Befunde erarbeitet noch empirische oder theoretische Forschungsergebnisse bestätigt oder widerlegt. Vielmehr verfolgt diese Studie das doppelte Ziel der *Unterrichtsentwicklung* und der *Unterrichtserforschung*.

In diesem Schlusskapitel werden nun sowohl die Hauptergebnisse der Studie entlang der leitenden Forschungsfragen rekapituliert als auch Forschungsperspektiven für mögliche Anschlussuntersuchungen skizziert.

7.1 Ertrag der Arbeit

Mathematische Vorstellungsübungen gehen davon aus, dass die Mathematik trotz oder gerade wegen ihrer Abstraktheit dort, wo sie verständig gelernt und einfallsreich gehandhabt wird, auf Vorstellungen angewiesen ist. Nun bedarf es einer gewissen Anstrengung und Konzentration, Vorstellungen mathematischer Inhalte aufzubauen und aufrechtzuerhalten. Erbringen Schülerinnen und Schüler in einer Vorstellungsübung diese Leistung, können sie die erzeugten Vorstellungen für eine eigenständige, reflektierende und produktive Auseinandersetzung mit fachlichen Fragen einsetzen. Im Gespräch über ihre Vorstellungen können sie den Unterricht bereichern und dabei insbesondere der Lehrperson einen aufschlussreichen Einblick in ihre Denk- und Herangehensweisen gewähren.

7.1.1 Zu Kapitel 3 – Erfahrungen beim Unterrichtseinsatz

In Kapitel 3 wurden zunächst die rundum positiven Erfahrungen geschildert, die ich mit dem Unterrichtsinstrument machte. Dass die Schülerinnen und Schüler mit großem Interesse und Engagement an Vorstellungsübungen teilnahmen, ermutigte mich denn auch, in allen Klassen regelmäßig Vorstellungsübungen durchzuführen und das Konzept der Vorstellungsübungen weiterzuverfolgen.

In Ergänzung zu diesen eigenen Erfahrungen wurden die Erfahrungen von knapp hundert Gymnasiastinnen und Gymnasiasten beschrieben. Sie waren im Rahmen einer Fragebogen-Umfrage erhoben worden, die schon vor Verfassen dieser Arbeit zum Zweck eines Feedbacks durchgeführt worden war. Diese Erfahrungen wurden nun, im Rahmen der Studie, unter dem Blickwinkel der Akzeptanz des Unterrichtsinstruments ausgewertet.

Dazu wurden die Kategorien der Akzeptanzforschung geeignet modifiziert und für die gegebene Situation in eine *Einstellungs-*, eine *Wirkungs-* und eine *Durchführungsakzeptanz* geschieden. Damit konnten die Schülerantworten strukturiert und deskriptiv ausgewertet werden. Folgende Forschungsfragen standen dabei im Zentrum:

(F1a, b) Wie groß war die Einstellungs-, die Wirkungs- und die Durchführungsakzeptanz der befragten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten gegenüber dem Unterrichtsinstrument und wie sah sie aus?

Alle Fragen zur Einstellungsakzeptanz wurden im Mittel verhalten bis klar zustimmend beurteilt bei hohem Konsens. Die Wirkungs- und die Durchführungsakzeptanz von Vorstellungsübungen sind auch gegeben, wenn sie auch weniger hoch und weniger einhellig ausfallen als die Einstellungsakzeptanz.

Wie die Antworten auf die offen formulierten Fragen zeigen, schrieben die Schülerinnen und Schüler Vorstellungsübungen mehrheitlich kognitive Wirkungen zu. Andere Antworten betrafen emotional positive Aspekte (Freude, Entspannung), aber auch negative Aspekte (Verärgerungen durch Vorstellungsschwierigkeiten) wurden genannt. Die Frage nach der weiteren Durchführung von Vorstellungsübungen wurde klar bejaht. *Damit wurden Vorstellungsübungen nicht nur aufgrund meiner eigenen Beobachtungen, sondern auch aus Sicht der befragten Klassen akzeptiert, und zwar in allen drei Kategorien der Einstellung, der Wirkung und der Durchführung.*

Beim Einsatz des Unterrichtsinstruments war der Eindruck entstanden, dass die Akzeptanz der Gymnasiastinnen größer ist als die der Gymnasiasten. Dieser Eindruck konnte allerdings auch dadurch begründet sein, dass sich die Schülerinnen an mathematischen Vorstellungsübungen intensiver beteiligten als am übrigen Mathematikunterricht, in dem sie eher passiver sind als ihre männlichen Mitschüler. Dies führte zur nächsten Forschungsfrage:

(F1c) Gab es bei der Akzeptanz des Unterrichtsinstruments geschlechtstypische Unterschiede? Gab es Gemeinsamkeiten?

Die Fragen zur Einstellungsakzeptanz wurden von den Schülerinnen durchweg zustimmender beurteilt als von den Schülern. Bei der Wirkungs- und Durchführungsakzeptanz hingegen ergaben sich keine so klaren geschlechtstypischen Unterschiede. Bei den offenen Fragen schrieben die Schülerinnen Vorstellungsübungen ähnlich oft positive kognitive Wirkungen zu wie die Schüler, während emotionale Wirkungen überproportional oft von Schülerinnen genannt wurden. Auch wünschten sich die Schülerinnen einen etwas häufigeren Einsatz von Vorstellungsübungen als die Schüler. *Anders als in vielen empirischen Studien zum Mathematikunterricht akzeptierten die befragten Gymnasiastinnen mathematische Vorstellungsübungen nicht weniger als die Gymnasiasten.*

7.1.2 Zu Kapitel 4 – Vorstellen und Vorstellungen in der Mathematikdidaktik

Um mit dieser Arbeit ein neues Unterrichtsinstrument explorieren und damit mathematikdidaktisches Neuland betreten zu können, musste zuvor die (nicht einfach in den Griff zu bekommende) denkpsychologische Kategorie der *Vorstellung* im Kontext von Vorstellungsübungen begrifflich bestimmt werden. Entsprechend lautete die zentrale Forschungsfrage des vierten Kapitels wie folgt:

(F2a) Auf welchem Begriffsverständnis von Vorstellung basiert das Unterrichtsinstrument?

Das Unterrichtsinstrument geht von der Annahme aus, dass das Lernen von Mathematik durch Vorstellungen Unterstützung erfährt. Nicht nur im allgemeinen Alltagsverständnis, auch für die Kognitionspsychologie sind Vorstellungen mehr oder weniger klare visuelle Bilder von potenziell wahrnehmbaren Gegenständen bzw. von gegenständlichen Situationen. Damit haftet Vorstellungen der Charakter statischer und rezeptiv erworbener gedanklicher Objekte an. In den Texten der Vorstellungsübungen werden jedoch nicht nur statische Bilder, sondern mindestens ebenso sehr gedankliche Handlungen beschrieben. Wie in zwei Exkursen aufgearbeitet wurde, heben denkpsychologische Traditionen (Piaget, Aebli, Galperin) gerade den Aspekt des gedanklichen Handelns als Grundlage kognitiver Leistungen hervor, ohne jedoch deren Objektcharakter aus den Augen zu verlieren. Auf dieser Auffassung gründen auch mathematikdidaktische Prinzipien wie das „operative Prinzip“ (Wittmann) und das Prinzip „beweglichen Denkens“ (Meraner Reform um Klein), die zur Bearbeitung mathematischer Fragen das gedankliche Handeln mit und an mathematischen Objekten propagieren.

Dem Unterrichtsinstrument liegt mit anderen Worten nicht nur ein bildhaftes, sondern ein weiteres, nämlich dualistisches Begriffsverständnis zugrunde. *Vorstellungen werden in dieser Arbeit sowohl im Sinne von Vorstellungsbildern (in visueller, aber auch taktiler oder auditiver Gestalt) als auch im Sinne von Vorstellungshandlungen (in Form gedanklicher Bearbeitungen oder Bewegungen) verstanden. Beide Aspekte sind eng miteinander verknüpft, da Vorstellungsbilder einerseits durch Vorstellungshandlungen aufgebaut und verändert werden sowie andererseits die Art und Weise der möglichen Vorstellungshandlungen beeinflussen.*

Durch diese Begriffsbestimmung konnte auch die zweite Forschungsfrage des theoretischen Kapitels beantwortet werden:

(F2b) Welche Bezüge zu mathematikdidaktischen Prinzipien weist das Unterrichtsinstrument auf?

Mathematische Vorstellungsübungen betten mathematische Inhalte (Objekte, Probleme, Begründungen und Paradoxa) in außermathematischen Bild- und Handlungszusammenhängen ein. *Weil sie dazu anleiten, an außermathematischen Objekten gedanklich zu handeln und die Objekte spezifischen mathematischen Fragen zu unterwerfen, weisen sie Bezüge zum operativen Prinzip (Wittmann) und zum beweglichen Denken (Meraner Reform) auf.*

Die Sichtung der Literatur zur Begriffsbestimmung ergab unter anderem, dass die didaktische Forschung der letzten Jahre Schülervorstellungen großes Interesse entgegenbringt. Dass es nicht nur für Forschende, sondern auch für alle am Unterricht Beteiligten gewinnbringend sein könnte, Schülervorstellungen als eine Form kognitiver Lernvoraussetzungen mit einzubeziehen, wird allerdings nur selten formuliert. Deshalb fehlen entsprechende unterrichtspraktische Modellierungen fast ganz, praktikable Unterrichtsinstrumente, mit denen sich Schülervorstellungen heben und sowohl von Lehrkräften als auch von Schülerinnen und Schülern produktiv machen lassen, werden in der einschlägigen Literatur kaum beschrieben. Dennoch konnte im vierten Kapitel folgende Forschungsfrage beantwortet werden:

(F2c) Welches pädagogische Ziel verfolgt das Unterrichtsinstrument? Welche mathematikdidaktische Unterrichtskonzepte verfolgen ein ähnliches Ziel?

Für vom Hofe basiert jede erfolgreiche Befassung mit Mathematik auf normativen Grundvorstellungen, in denen sich Sinn und Bedeutung mathematischer Inhalte konstituiert. Damit weist er Vorstellungsinhalten eine ‚atomare' Funktion für das Lernen und Verstehen von Mathematik zu. Allerdings interessieren in vom Hofes Unterrichtskonzept tatsächlich vorhandene Schülervorstellungen nur im Hinblick darauf, ob sie mit Grundvorstellungen übereinstimmen. So bleiben wichtige Möglichkeiten im Umgang mit Schülervorstellungen unausgeschöpft.

Einen pädagogischen, entwicklungsorientierten Blick, der sich nicht nur für ‚Richtig oder Falsch' interessiert, ermöglicht Gallins und Rufs Dialogische Didaktik. Sie zeigt, wie Schülervorstellungen – die in dieser Arbeit als *singuläre Vorstellungen* verstanden werden – produktiv gemacht werden können, und zwar in doppelter Hinsicht: Zum einen steht Singuläres als Kernidee der Lehrperson am Anfang des Unterrichts, zum anderen werden die singulären, schriftlichen Auseinandersetzungen der Lernenden, die Auswirkungen ins Fachlich-Reguläre haben, von der Lehrperson für den weiteren Unterrichtsfortgang genutzt. Noch expliziter von singulären Schülervorstellungen aus geht Lengninks Unterrichtskonzept des reflektierenden Entwickelns von Vorstellungen. Ihr Unterricht aktiviert und thematisiert gezielt lebensweltliche Vorstellungen der Schülerinnen und Schülern, um anschließend im Klassengespräch Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen singulären Vorstellungen und Grundvorstellungen – die als *reguläre Vorstellungen* verstanden werden – herausarbeiten zu können.

Damit wurde die Forschungsfrage *(F2c)* nach dem pädagogischen Ziel wie folgt beantwortet: *Mathematische Vorstellungsübungen regen Lernende dazu an, singuläre Vorstellungen zu mathematischen Inhalten aufzubauen. Dadurch werden regulären Vorstellungen im Bereich persönlicher Werte und Normen Bedeutung verliehen, was einen verständigen Umgang mit Mathematik ermöglicht. Insofern weisen Vorstellungsübungen Bezüge zu mathematikdidaktischen Unterrichtskonzepten wie dem Aufbauen von Grundvorstellungen (vom Hofe), der Dialogischen Didaktik (Gallin und Ruf) und dem reflektierenden Entwickeln von Vorstellungen (Lengnink) auf.*

7.1.3 Zu Kapitel 5 – Analyse des Unterrichtsinstruments

Im fünften Kapitel der Arbeit wurden die Unterrichtsumgebung und die Texte von Vorstellungsübungen in unterschiedlicher Hinsicht reflektiert und analysiert. Zuerst wurde begründet, inwiefern das Unterrichtsinstrument sich einer gemäßigt konstruktivistischen Auffassung von Unterricht zuordnen lässt und dass es damit modernen mathematikdidaktischen Leitideen folgt.

Im Weiteren sollte das inhärente mathematikdidaktische Potenzial aller acht Vorstellungsübungen aufgezeigt werden:

(F3a) Welche Vorstellungen intendiert der Text jeder einzelnen Vorstellungsübung, welche Vorstellungen ermöglicht er? Zu welchen mathematischen Prozessen kann er im Mathematikunterricht führen?

Um diese Frage zu beantworten, mussten zuerst verfeinerte Analysekategorien geschaffen und begrifflich gefasst werden. Ein erster Gesichtspunkt der Analyse betraf mathematisch-heuristische Prozesse wie *Vergegenwärtigen*, *Erkunden* und *Experimentieren*, die in der ersten Phase einer Vorstellungsübung beabsichtigt sind. Einen weiteren Gesichtspunkt stellten mathematische Prozesse wie *Modellieren* oder *Argumentieren* dar.

Der eigentliche Schwerpunkt der Analyse lag jedoch auf den Vorstellungsprozessen, und zwar auf den vom Text der Vorstellungsübung intendierten Vorstellungen sowie den möglichen, von den Lernenden konstruierten Vorstellungen. Aufgrund meiner Begriffsbestimmung wurde bei den intendierten Vorstellungen zwischen *Vorstellungsbildern* und *Vorstellungshandlungen* unterschieden, dem dritten Gesichtspunkt der Analyse. Für den vierten und letzten Gesichtspunkt wurden die singulären Vorstellungen, welche meine Schülerinnen und Schüler tatsächlich konstruierten, in *produktive* und *hinderliche* Vorstellungen geschieden, können doch singuläre Vorstellungen mathematische Prozesse unterstützen, aber auch behindern oder gar blockieren.

Mit der Analyse ließ sich die Frage nach dem mathematikdidaktischen Potenzial der einzelnen Vorstellungsübungen zusammenfassend wie folgt beantworten: *Mathematische Vorstellungsübungen sind geeignet, zentrale mathematische Inhalte zu thematisieren. Darüber hinaus leuchten sie singuläre Vorstellungen als wenig beachtete Elemente mathematischer Aktivität aus und machen sie so auch nutzbar. Singuläre Vorstellungen, die Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in Vorstellungsübungen konstruieren, können zum Ausgangspunkt für mathematische Prozesse werden, indem sie mathematisches Handeln auch dort ermöglichen, wo Lösungswege und Lösungen noch unbekannt sind.*

Im letzten Abschnitt des fünften Kapitels ging es um das Potenzial, welches die Unterrichtsumgebung als Ganzes betrifft. Die entsprechende Forschungsfrage zielte auf Effekte von Vorstellungsübungen auf Lernende und lautete:

(F3b) Welche Effekte in Bezug auf den Umgang mit Mathematik können von einem regelmäßigen Einsatz des Unterrichtsinstruments erwartet werden?

Diese Frage wurde mit Hilfe von Forschungsarbeiten aus der Mathematikdidaktik und verwandten Disziplinen sowie auf der Grundlage meines Erfahrungswissens beantwortet und durch ausgewählte Antworten aus der Akzeptanzbefragung illustriert. So wurde zum einen gezeigt, dass und wie das Unterrichtsinstrument die Bildung *von* Vorstellungen fördert, also den Aufbau mathematisch produktiver Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen sowie die Verwendung von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen unterstützt und dadurch mathematische Erkenntnisse schafft. Zum anderen wurde begründet, warum das Unterrichtsinstrument die Bildung *durch* Vorstellungen fördert, das heißt der Förderung von Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht sowie der Vermittlung eines angemessenen Bildes von der

Mathematik zugute kommt. Damit wurde auch der doppeldeutige Titel dieser Arbeit – „Mathematische Vorstellungen bilden“ – erklärt.

Mit ihren auf konkrete fachliche Inhalte und Prozesse gerichteten Effekten gehen mathematische Vorstellungsübungen deutlich über Phantasiereisen oder ein Training des Vorstellungsvermögens hinaus, auch wenn dies aufgrund ihrer ungewohnten Choreographie nicht auf den ersten Blick ersichtlich sein mag. Im Gegensatz zu eher inhaltsarmen Vorstellungstechniken bewirkt der regelmäßige Einsatz von mathematischen Vorstellungsübungen, *dass Lernende singuläre Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen sowohl für eine eigenständige als auch für eine reflektierende und damit letztlich produktive Auseinandersetzung mit Mathematik nutzen.*

7.1.4 Zu Kapitel 6 – Grenzen und Ausbau des Unterrichtsinstruments

Wie schon die Unterscheidung von produktiven und hinderlichen Vorstellungen zeigt, sind Vorstellungsbilder nicht in allen Situationen und nicht für alle Lernende ein geeignetes Instrument zum Lernen und Bearbeiten von Mathematik. Deshalb wurden im sechsten Kapitel der Arbeit – ganz im Sinn der Aktionsforschung – die Grenzen und Ausbaumöglichkeiten des Unterrichtsinstruments diskutiert. Zunächst ging es darum, welche mathematischen Sachverhalte sich in Vorstellungsübungen präsentieren lassen:

(F4a) Welchen inhaltlichen Grenzen unterliegen die Vorstellungsübungen?

Aufgrund der Erfahrung beim Entwerfen von Vorstellungsübungen und ihrem Einsatz im Mathematikunterricht wurden zwei Grenzen ausgemacht. Besonders für Vorstellungsübungen geeignet sind Sachverhalte, die anschaulich beschreibbar sind. Dabei handelt es sich naturgemäß um geometrische Themen. Wie manche Vorstellungsübungen jedoch zeigen, lassen sich auch nichtgeometrische Themen thematisieren, falls sie sich in gedankliche Bildzusammenhänge und Handlungsanweisungen stellen lassen. *Nur wenn sich ein mathematischer Sachverhalt anschaulich als Folge von gedanklich verfügbaren Bildern und Handlungen beschreiben lässt, eignet er sich für eine mathematische Vorstellungsübung.*

Die zweite Grenze betrifft die kognitive Komplexität eines Inhalts. Sie muss wegen der rein gedanklichen Vergegenwärtigung und Bearbeitung tiefer liegen als bei der üblichen Bearbeitung von mathematischen Inhalten, weil keine Hilfsmittel (Notizen, Skizzen, Modelle) eingesetzt werden können. *Nur wenn* *sich ein mathematischer Sachverhalt ohne Überschreitung einer gewissen kognitiven Komplexität beschreiben lässt, eignet er sich für eine mathematische Vorstellungsübung.*

Selbstverständlich hängt die letztgenannte Grenze auch davon ab, welche kognitive Komplexität die Schülerinnen und Schüler aktuell bewältigen können. Ausdrücklich auf die Personen war die nächste Forschungsfrage gerichtet:

(F4b) Welche Schwierigkeiten können beim Einsatz des Unterrichtsinstruments auftreten? Welche Ursachen sind denkbar? Wie kann ihnen begegnet werden?

Beim Einsatz des Unterrichtsinstruments kam es immer wieder vor, dass sich Gymnasiastinnen und Gymnasiasten einen beschriebenen Bildzusammenhang oder eine Handlungsanweisung nicht vorstellen konnten und sich deshalb ärgerten. Eine triviale Ursache kann darin liegen, dass eine Vorstellungsübung die beiden inhaltlichen Grenzen nicht beachtet. Mathematikdidaktische Arbeiten zum Denkstil (Schwank) legen die Vermutung nahe, dass der Grund für Vorstellungsschwierigkeiten auch in der individuellen – und möglicherweise sogar geschlechtstypischen – Präferenz für bestimmte Denkwerkzeuge liegen könnte. Erste Modifikationen der Unterrichtsumgebung wie die Möglichkeit, durch Handheben Schwierigkeiten zu signalisieren, oder mehrfache Pausen beim Vorlesen des Texts einer Vorstellungsübung wurden genannt, mit denen Vorstellungsschwierigkeiten abgeholfen werden können.

Eine zweite Schwierigkeit von Schülerinnen und Schülern betraf das Mitteilen und Besprechen ihrer Vorstellungen. Da Singuläres gerne als Ausdruck der eigenen Person erlebt wird, scheint im Umgang mit singulären Vorstellungen anderer Personen besonders wichtig zu sein, solchen Vorstellungen respektvoll zu begegnen.

Das Unterrichtsinstrument stellt singuläre Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern ins Zentrum und macht sie explizit. Dadurch können Lernende Vorstellungen zur Bearbeitung fachlicher Fragen heranziehen. Im Laufe dieser Arbeit wurde zudem klar, wie Singuläres darüber hinaus auch von Lehrpersonen für den weiteren Unterrichtsverlauf genutzt werden kann. Deshalb ging es im letzten Abschnitt der Studie um folgende Frage:

(F4c) Wie lässt sich die Unterrichtsumgebung ausbauen, damit ihre Impulse stärker als bisher im Unterrichtsverlauf genutzt werden können?

Eine chancenreiche Ausbaumöglichkeit wurde in der Einführung einer zusätzlichen Phase der Verschriftlichung gesehen, wodurch singuläre Vorstellungen unverfälscht gesichert werden. Über Effekte konnte an dieser Stelle nur spekuliert werden. Vermutlich können sich die Lernenden besser Klarheit über ihre singulären Vorstellungen beim Bearbeiten mathematischer Fragen verschaffen. Auch können die Vorstellungen gründlicher im Hinblick auf ihre Produktivität bzw. Hinderlichkeit reflektiert und folglich besser bearbeitet und weiterentwickelt werden. *Insgesamt dürfte die Verschriftlichung zu einer intensivierten Auseinandersetzung mit den konstruierten Vorstellungen führen, und zwar sowohl seitens der Schülerinnen und Schüler als auch seitens der Lehrerinnen und Lehrer.*

Im zweiten, umfassenderen Ausbauvorschlag wurden die durch eine Schreibphase ergänzten Vorstellungsübungen in die Dialogische Didaktik eingebettet. Wegen der Genese der jeweiligen Vorstellungsübung – jede Übung geht auf eine singuläre Vorstellung und damit auf eine Kernidee der Lehrperson zurück – und ihres Ziels – die Anregung von singulären Vorstellungen der Lernenden – lag es nahe, sie als eine neue Form von Aufträgen im Rahmen der Dialogischen Didaktik anzusehen. Damit werden der Lehrperson nicht nur die verschriftlichten singulären Vorstellungen aller Schülerinnen und Schüler verfügbar gemacht, um auf Auswirkungen ins Reguläre befragt werden zu können. Die Ergebnisse lassen sich auch für den folgenden Unterricht nutzen, unter anderem in Form neuer Vorstellungsübungen. *Mit anderen Worten können Lehrkräfte Vorstellungsübungen im Rahmen der Dialogischen Didaktik noch dezidierter als bisher zu diagnostischen Zwecken heranziehen, indem sie die verschriftlichten singulären Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler für den weiteren Unterrichtsfortgang nutzen.*

Zum Schluss von Kapitel 6 wurde die Vermutung geäußert, dass Vorstellungsübungen eher zur Produktion von Texten über Singuläres anregen als herkömmliche Aufgaben oder Aufträge, da individuell konstruierte Vorstellungen unmittelbar als singulär erlebt werden. *Damit liegt die Einstiegsschwelle in einen dialogischen Mathematikunterricht, in dem Texte über Singuläres produziert werden, bei einer Verwendung von Vorstellungsübungen tiefer als bei der Verwendung von Aufgaben oder Aufträgen.*

7.2 Forschungsperspektiven

Diese Arbeit beantwortet nicht nur Fragen, sie schafft auch die Voraussetzungen für neue Forschungsperspektiven. Drei Richtungen möglicher Anschlussuntersuchungen werden abschließend angedacht. In der ersten wird der Kreislauf der Aktionsforschung weitergeführt, die zweite betrifft die empirische Untersuchung von Effekten und die dritte zielt über das Unterrichtsinstrument hinausgehend auf Vorstellungsstrategien.

7.2.1 Aktionsforschung

Der Kreislauf von Aktion und Reflexion ist in der Aktionsforschung iterativ angelegt, er endet nicht damit, dass aus der Reflexion einer Aktion neue Aktionsvorschläge entwickelt werden. So geht es in einem nächsten Schritt darum, die vorgeschlagenen Änderungen in die Praxis einzubringen und auf ihre *Brauchbarkeit* hin zu überprüfen, das heißt:

- Ist der entworfene Ausbau der Unterrichtsumgebung praktikabel?
- Lassen sich Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern dank der Modifikationen der Unterrichtsumgebung besser vermeiden?
- Lassen sich die singulären Vorstellungen der Lernenden dank des Ausbaus der Unterrichtsumgebung im weiteren Unterrichtsverlauf besser nutzen?
- Auf welche Akzeptanz der Schülerinnen und Schüler stoßen die vorgeschlagenen Modifikationen und der Ausbau?

Während bei den ersten Fragen aufgrund dieser Arbeit von einer Bejahung auszugehen ist, ist die Antwort auf die letzte Frage weniger vorhersehbar, insbesondere weil die Ergänzung des Unterrichtsinstruments durch eine schriftliche Phase eine wesentliche Veränderung desselben darstellt. Die Modifikation der Unterrichtsumgebung muss also ein weiteres Mal reflektiert werden.

Bevor der Gültigkeitsbereich meiner Ergebnisse überprüft werden kann, muss mein Erfahrungswissen anderen Mathematiklehrerinnen und -lehrern zugänglich gemacht werden. Wenn diese Arbeit auch das dem Unterrichtsinstrument zugrunde liegende Konzept explizit macht, eignet sie sich nicht unmittelbar für andere Lehrpersonen, die Vorstellungsübungen in ihren Unterricht einbringen wollen. So müssen etwa *Konstruktionsmerkmale* der Vorstellungsübungen (Welche Merkmale haben konstituierenden, welche dekorativen Charakter?) handlungsleitend, beispielsweise in Form eines Kriterienkatalogs, dargestellt werden. Vorbereitende Arbeiten zu einem entsprechenden *Handbuch* sind in Planung.

Nur wenn einige und besser noch: viele Lehrerinnen und Lehrer mit dem Unterrichtsinstrument bekannt gemacht werden, lässt sich auch der *Gültigkeitsbereich* der in dieser Arbeit formulierten Beobachtungen und Ergebnisse überprüfen:

- Welche Erfahrungen und Beobachtungen machen andere Mathematiklehrerinnen und -lehrer mit dem Unterrichtsinstrument?
- Wie muss das Unterrichtsinstrument für den Einsatz im Mathematikunterricht anderer Schwerpunkte (Mathematik oder Naturwissenschaften), Schultypen (DMS) oder -stufen (SI) adaptiert werden?

Die Untersuchung solcher Fragen wird nicht nur zeigen, welche in dieser Arbeit formulierten Beobachtungen und Aussagen für andere Lehrkräfte gültig sind und welche revidiert werden müssen. Sie kann auch in das Handbuch einfließen, ist doch davon auszugehen, dass sich das Unterrichtsinstrument verändert, wenn andere Personen damit arbeiten und das Unterrichtsinstrument auf ihre eigenen Umstände und Bedürfnisse zuschneiden.

7.2.2 Effekte

In dieser Arbeit werden zwei fachliche und zwei überfachliche Effekte, die von einem regelmäßigen Einsatz des Unterrichtsinstruments erwartet werden, beschrieben und begründet: der Aufbau mathematisch produktiver Vorstellungen, die Verwendung von Vorstellungen als heuristische Strategie, die Förderung von Nachdenklichkeit sowie die Vermittlung eines angemessenen Mathematikbildes. Es steht nun an, diese Effekte in Folgeuntersuchungen zu überprüfen:

- Welche der beschriebenen Effekte lassen sich *nachweisen*?

Nachweise setzen grundsätzlich ein adäquates methodisches Vorgehen voraus. So können Schülerinnen und Schüler befragt werden, um den erwarteten Effekt, dass sie durch Vorstellungsübungen verstärkt Vorstellungsbilder und Vorstellungshandlungen für mathematische Aktivitäten heranziehen, zu überprüfen (für entsprechende Fragen siehe etwa [Douville & Pugalee 2003]). Eine aussagekräftigere Überprüfung ermöglicht das „mathematical processing instrument“ von Norma Presmeg. Mit ihm steht ein Forschungsinstrument zur Verfügung, das erhebt, wie sehr visuelle Vorstellungen bei der Bearbeitung und Lösung mathematischer Aufgaben bevorzugt werden. Es eignet sich nicht nur deshalb für die Erforschung der Effekte von Vorstellungsübungen, weil Presmegs Auffassung von Vorstellungen eng mit der hier vertretenen verwandt sind, sondern auch, weil das Instrument in einer Version für Klassen der 11. Jahrgangsstufe vorliegt. [Presmeg 1985][1]

Dieses Forschungsinstrument lässt sich in bekannter „Pretest-posttest"-Manier in eigenen und anderen Klassen einsetzen, um zu untersuchen, ob Vorstellungsübungen wie erwartet die Präferenz der Nutzung von Vorstellungen erhöhen. Wegen seiner besonderen Konstruktion kann zudem der Frage nachgegangen werden, ob in erster Linie Personen, die schon ‚von Natur aus' Vorstellungen einsetzen, von Vorstellungsübungen profitieren oder auch solche, die dies zu Beginn der Untersuchung eben nicht tun.[2]

Zur Untersuchung des anderen fachlichen Effekts, des Aufbaus mathematisch produktiver Vorstellungen, muss das Unterrichtsinstrument in seiner erweiterten Version implementiert sein: Es müssen entsprechende Schülerdokumente vorliegen. Bei der Analyse könnten Methoden der Objektiven Hermeneutik oder solche der Interpretativen Unterrichtsforschung herangezogen werden.[3]

Unter der Annahme, dass sich der Aufbau von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen auch in der Konstruktion und im Gebrauch von Metaphern und Metonymien niederschlägt, lassen sich die Schülerdokumente zusätzlich im Hinblick auf ihre bildhafte Sprache untersuchen. Aufgrund zunehmend differenzierter Metaphern und Metonymien lässt sich dann auch die *Entwicklung* von Schülervorstellungen nachzeichnen. In Ergänzung zum „mathematical processing instrument" kann so zusätzlich in Erfahrung gebracht werden, *wie* Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungsbilder und -handlungen nutzen und zu einem Instrument mathematischer Aktivitäten und des Lernens überhaupt machen.[4]

In diesem Zusammenhang sind aber auch weitere Effekte denkbar. So ist davon auszugehen, dass mathematische Vorstellungsübungen durch ihren na-

[1] Das „mathematical processing instrument" wurde mehrfach in internationalen quantitativ-empirischen Untersuchungen eingesetzt, wobei u. a. seine Konstruktvalidität und -reliabilität bestätigt wurden [Presmeg & Bergsten 1995]. Für Presmegs Kategorisierung von Schülervorstellungen siehe die entsprechenden Fußnoten auf S. 117 und S. 129.

[2] Siehe Abschnitt 6.2.1, S. 219 ff.

[3] Die Objektive Hermeneutik ist eine Methode der qualitativen Sozialforschung zur Textinterpretation, welche die Gültigkeit einer Interpretation an intersubjektive Überprüfbarkeit bindet – „Textinterpretation als Wirklichkeitswissenschaft" [Wernet 2000]. In der Mathematikdidaktik verbreiteter ist die Interpretative Unterrichtsforschung, die auf ähnlichen Prinzipien beruht. Für eine Übersicht über ihre Anliegen und Methoden siehe [Hefendehl-Hebeker 1995] und [Krummheuer & Naujok 1999], für Ausführliches siehe bei [Maier & Voigt 1991] sowie [Voigt 1996].

[4] Für entsprechende Analysen siehe [Presmeg 1997] und [Presmeg 2004].

hezu unübersehbaren Einbezug von Sprache begriffsbildende Prozesse unterstützen (siehe auch Wittmanns „operative Begriffsbildung“, S. 86 ff.). Neben fachlichen Aspekten könnten die dergestalt ausgelösten intensiven Diskussionen aber gerade auch soziale Aspekte der Handlungskompetenz fördern. Damit stellen sich Fragen wie folgende:

- Fördern Vorstellungsübungen *begriffsbildende Prozesse*?
- Fördern Vorstellungsübungen die *soziale Handlungskompetenz*?

Die Perspektive wechseln, Leistungen von Mitschülerinnen und -schülern erkennen und würdigen sowie anderen mit Neugier und Respekt begegnen sind nicht nur ganz allgemein Fähigkeiten, die auch ein erfolgreiches Lernen garantieren. Sie spielen gerade in der Phase der Besprechung singulärer Vorstellungen eine wichtige Rolle und könnten sich in Schülerdokumenten zu Vorstellungsübungen niederschlagen.[5]

Letztlich stellt sich auch die Frage, welche Schülerinnen und Schüler von Vorstellungsübungen profitieren:

- Fördert das Unterrichtsinstrument *Schülerinnen und Schüler* gleichermaßen?
- Fördert das Unterrichtsinstrument *gute und schlechte* Schülerinnen und Schüler gleichermaßen?

Auf der Grundlage der Akzeptanzbefragung darf die erste Frage als bejaht gelten (siehe S. 81 f.). Da die Schülerinnen und Schüler anonym und keine gymnasialen Klassen mit mathematischem bzw. naturwissenschaftlichem Schwerpunkt befragt wurden, lässt sie keine Vermutungen zur Beantwortung der zweiten Frage zu. Es ist jedoch denkbar, dass Personen, die einen prädikativen Denkstil bevorzugen (S. 102 und S. 221) oder denen es liegt, mathematische Fragen durch Abstrahieren anzugehen, den durch das Unterrichtsinstrument angeregten Bildgehalt als störend und als die eigenen Denkprozesse retardierend erleben.

[5] Die Handlungskompetenz umfasst neben sozialen auch fachliche und personale Dispositionen, die es einer Person ermöglichen, erfolgreich zu lernen und handeln [Weinert 2001, S. 51]. Für ihre Interpretation im allgemeinen schulischen Kontext siehe [Ruf 2003, S. 13]. Dass ein soziales Miteinander insbesondere für das Interesse an Mathematik verantwortlich sein kann, wird in der mathematikdidaktischen Interessentheorie von [Bikner-Ahsbahs 2005] hervorgehoben.

7.2.3 Vorstellungsstrategien

Die durch Vorstellungsübungen angeregten und nachfolgend verschriftlichten Vorstellungen von Lernenden lassen sich nicht nur im Unterricht nutzen und zum Nachweis der Effekte von Vorstellungsübungen heranziehen, vielmehr eröffnen sie eine weitere Forschungsperspektive. So können sie als Ausgangsmaterial dafür dienen, Vorstellungsstrategien zu eruieren und zu benennen:

- Welche *Vorstellungsstrategien* lassen sich in Schülerdokumenten zu Vorstellungsübungen ausmachen?

In gewissem Sinne weist bereits die zweispaltige Darstellung der Texte von Vorstellungsübungen (Tab. 5.2 bis Tab. 5.9) auf zwei unterschiedliche Vorstellungsstrategien hin: Das Wechselspiel von Vorstellungsbildern und Vorstellungshandlungen, in dem ein mathematischer Sachverhalt beschrieben wird, ist eine Mischform zwischen einer *visuell-bildhaften* und einer *dynamisch-handelnden Vorstellungsform.* Es könnte versucht werden, analog zu Pólyas „Strategien zum Lösen von Aufgaben“ in den in Kapitel 5 dargestellten Analysen von Vorstellungen differenziertere Vorstellungsstrategien auszumachen und durch die Sichtung zusätzlich erhobener Vorstellungen weiterzuentwickeln.[6]

Da Vorstellungsstrategien wie Lösungsstrategien Formen mathematischen Denkens sind, führt diese Forschungsperspektive zurück zur *Frage nach den unterschiedlichen Wegen mathematischen Denkens* – der Frage, die mich letztlich zur Entwicklung mathematischer Vorstellungsübungen führte.

[6] Als solche Strategien nennt Pólya unter anderem „Analogie“, „Induktion“, „Spezialisierung“, „Variation“ und „Verallgemeinerung“ [Pólya 1949]. Sie sind rein deskriptiv, was Schoenfeld dazu veranlasst, unterschiedliche (präskriptive!) Substrategien herauszuarbeiten ([Schoenfeld 1985] und [Schoenfeld 1987 a, S. 17–20]). Für eine Analyse von Vorstellungsstrategien wären Schoenfelds Substrategien vermutlich ebenfalls zu berücksichtigen.

Teil IV

Anhang

A Fragebogen

A.1 Fragebogen Version a)

<u>Fragebogen zu den Mathematischen Vorstellungsübungen</u>

Bitte nehmen Sie sich die Mühe, folgenden Fragebogen sorgfältig und ehrlich zu beantworten. Herzlichen Dank !

	stimmt		weder noch		stimmt nicht
1. VÜ wecken mein Interesse.	☐	☐	☐	☐	☐
2. VÜ langweilen mich.	☐	☐	☐	☐	☐
3. VÜ bieten die Gelegenheit, eigenen Gedanken nachzugehen, die mich im Moment gerade beschäftigen.	☐	☐	☐	☐	☐
4. VÜ regen mich an.	☐	☐	☐	☐	☐
5. VÜ regen mich auf.	☐	☐	☐	☐	☐
Nach einer VÜ fühle ich mich ...					
6. ... konzentrierter (als davor).	☐	☐	☐	☐	☐
7. ... motivierter (als davor).	☐	☐	☐	☐	☐
8. ... gefrusteter (als davor).	☐	☐	☐	☐	☐
9. ... verwirrt.	☐	☐	☐	☐	☐
10. Durch VÜ erfahre ich Neues über Mathematik.	☐	☐	☐	☐	☐
11. VÜ stellen Querverbindungen zu anderen Themen her.	☐	☐	☐	☐	☐
12. Durch VÜ erfahre ich Neues über mich und meine Person.	☐	☐	☐	☐	☐
13. VÜ sprechen mich mehr an als der übliche Mathe-Unterricht.	☐	☐	☐	☐	☐
14. VÜ nehmen mir Zeit weg, in der ich lieber am normalen Stoff arbeiten würde.	☐	☐	☐	☐	☐
15. Ich möchte mehr Zeit für VÜ und deren Besprechung haben.	☐	☐	☐	☐	☐
16. Pauschal: VÜ lohnen sich / mache ich gerne.	☐	☐	☐	☐	☐

17. Inwiefern regen Sie VÜ an bzw. auf (kurzfristig)? ....
....
18. Was lösen VÜ in Ihnen aus (langfristig)? ....
....
19. Was müsste bei den VÜ für Sie geändert werden, damit VÜ Sie mehr ansprechen würden? ....
....
20. An welche Vorstellungsübungen können Sie sich erinnern, die Sie besonders interessant fanden? ....
....
21. Wollen Sie weiterhin VÜ machen? Wie oft? ....
....

A.2 Fragebogen Version b)

Fragebogen zu den Mathematischen Vorstellungsübungen

Bitte nehmen Sie sich die Mühe, folgenden Fragebogen sorgfältig und ehrlich zu beantworten. Herzlichen Dank !

KLASSE .... , ♀ ♂

	stimmt		weder noch		stimmt nicht
1. VÜ wecken mein Interesse	☐	☐	☐	☐	☐
2. VÜ langweilen mich.	☐	☐	☐	☐	☐
3. VÜ regen mich an.	☐	☐	☐	☐	☐
4. VÜ verärgern mich	☐	☐	☐	☐	☐
Nach einer VÜ fühle ich mich ...					
5. ... konzentrierter (als davor).	☐	☐	☐	☐	☐
6. ... motivierter (als davor).	☐	☐	☐	☐	☐
7. ... gefrusteter (als davor)	☐	☐	☐	☐	☐
8. ... verwirrt	☐	☐	☐	☐	☐
9. Durch VÜ erfahre ich Neues über Mathematik.	☐	☐	☐	☐	☐
10. VÜ haben für mich nichts mit der Mathematik zu tun.	☐	☐	☐	☐	☐
11. VÜ stellen Querverbindungen her.	☐	☐	☐	☐	☐
12. VÜ sprechen mich mehr an als der übliche Mathematik-Unterricht.	☐	☐	☐	☐	☐
13. Durch VÜ erfahre ich Neues über mich und meine Person..	☐	☐	☐	☐	☐
14. VÜ nehmen mir Zeit weg, in der ich lieber am eigentlichen Unterrichtsstoff arbeiten würde.	☐	☐	☐	☐	☐
15. Während einer VÜ gehe ich eigenen Gedanken und Bildern, die mich momentan beschäftigen und die nichts mit der VÜ zu tun haben, nach. .	☐	☐	☐	☐	☐
16. Ich möchte mehr Zeit für VÜ und deren Besprechung haben	☐	☐	☐	☐	☐
17. Ich möchte, dass VÜ mehr mit dem aktuell behandelten Unterrichtsstoff zu tun haben. . . .	☐	☐	☐	☐	☐
18. Pauschal: VÜ lohnen sich / mache ich gerne.	☐	☐	☐	☐	☐

19. Inwiefern regen Sie VÜ an bzw. verärgern Sie (kurzfristig)? ....
....

20. Was für Veränderungen können Sie an sich beobachten, die mit den VÜ zu tun haben könnten (langfristig)? ....
....

21. Was müsste an den VÜ für Sie geändert werden, damit VÜ Sie mehr ansprechen würden (thematisch / sprachlich / organisatorisch)?..
....

22. An welche Vorstellungsübungen können Sie sich erinnern, die Sie besonders interessant fanden? ....
....

23. Wollen Sie weiterhin VÜ machen? Wie oft? ....
....

B Mit SPSS berechnete Kenngrößen

B.1 Mittelwerte und Standardabweichungen zu den Items

	N			
	Valid	Missing	Mean	Std. Dev.
Item 1	88	0	4.35	.817
Item 2	88	0	1.48	.773
Item 3	86	2	3.67	.913
Item 4	87	1	1.55	.789
Item 5	87	1	3.49	1.170
Item 6	87	1	3.34	1.108
Item 7	87	1	1.47	.805
Item 8	87	1	2.28	1.138
Item 9	87	1	4.38	.852
Item 10	31	57	1.52	.851
Item 11	84	4	3.99	1.247
Item 12	88	0	3.81	1.258
Item 13	87	1	2.59	1.326
Item 14	88	0	1.35	.858
Item 15	87	1	2.37	1.440
Item 16	87	1	3.05	1.238
Item 17	31	57	3.32	1.222
Item 18	88	0	4.56	.771

B.2 Mittelwerte und Standardabweichungen, nach Geschlecht

	Geschlecht					
	m			w		
	N	Mean	Std. Dev.	N	Mean	Std. Dev.
Item 1	39	4.26	.993	49	4.43	.645
Item 2	39	1.62	.935	49	1.37	.602
Item 3	38	3.58	.948	48	3.75	.887
Item 4	39	1.56	.788	48	1.54	.798
Item 5	38	3.26	1.223	49	3.67	1.107
Item 6	39	3.05	1.234	48	3.58	.942
Item 7	39	1.51	.823	48	1.44	.796
Item 8	39	1.87	1.005	48	2.60	1.144
Item 9	39	4.33	.869	48	4.42	.846
Item 10	17	1.47	.874	14	1.57	.852
Item 11	39	4.13	1.281	45	3.87	1.217
Item 12	39	3.64	1.203	49	3.94	1.298
Item 13	39	2.31	1.260	48	2.81	1.347
Item 14	39	1.56	1.095	49	1.18	.565
Item 15	39	2.15	1.424	48	2.54	1.443
Item 16	39	2.90	1.334	48	3.17	1.155
Item 17	17	3.53	1.068	14	3.07	1.385
Item 18	39	4.41	.966	49	4.67	.555

B.3 Mittelwerte und Standardabweichungen, nach Klassen

	Klasse														
	GB10			GB11			GE11			GB12.1			GB12.2		
	N	Mean	Std. Dev.	N	Mean	Std. Dev.	N	Mean	Std. Dev.	N	Mean	Std. Dev.	N	Mean	Std. Dev.
Item 1	15	4.40	.737	22	4.77	.429	16	4.13	1.025	15	4.33	.724	20	4.05	.945
Item 2	15	1.60	.828	22	1.27	.550	16	1.44	1.094	15	1.60	.737	20	1.55	.686
Item 3	13	3.69	1.182	22	3.86	.834	16	3.75	.931	15	3.80	.775	20	3.30	.865
Item 4	14	1.50	.760	22	1.55	.858	16	1.56	.727	15	1.67	.816	20	1.50	.827
Item 5	15	3.47	1.302	22	3.77	1.270	15	3.20	.676	15	3.13	1.187	20	3.70	1.218
Item 6	14	3.07	1.269	22	3.68	1.041	16	3.44	.892	15	3.27	1.163	20	3.15	1.182
Item 7	14	1.14	.535	22	1.27	.550	16	1.56	.892	15	1.87	.915	20	1.55	.945
Item 8	14	2.00	1.109	22	2.23	1.152	16	2.44	.964	15	2.67	1.175	20	2.10	1.252
Item 9	14	4.29	.825	22	4.45	.963	16	4.00	1.033	15	4.33	.724	20	4.70	.571
Item 10	15	1.53	.834				16	1.50	.894						
Item 11	12	3.33	1.557	22	4.18	1.140	15	3.93	1.387	15	3.73	1.335	20	4.40	.821
Item 12	15	3.67	1.447	22	4.00	1.195	16	3.88	1.360	15	3.67	1.234	20	3.75	1.209
Item 13	14	2.71	1.267	22	2.32	1.323	16	2.19	1.328	15	2.27	1.280	20	3.35	1.182
Item 14	15	1.00	.000	22	1.32	.839	16	1.81	1.377	15	1.33	.724	20	1.30	.657
Item 15	15	2.07	1.438	22	2.18	1.468	16	2.13	1.258	14	2.50	1.557	20	2.90	1.447
Item 16	15	3.20	1.265	22	3.14	1.283	15	3.13	1.356	15	2.87	1.060	20	2.90	1.294
Item 17	15	3.40	1.121				16	3.25	1.342						
Item 18	15	4.80	.414	22	4.73	.550	16	4.44	1.094	15	4.27	.799	20	4.50	.827

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Alle Web-Adressen sind letztmals Ende 2006 auf ihre Gültigkeit überprüft worden.

[Aebli 1963] Aebli, Hans: *Psychologische Didaktik – Didaktische Auswertung der Psychologie von Jean Piaget.* Klett Verlag, Stuttgart, 1963.

[Aebli 1980] Aebli, Hans: *Denken, das Ordnen des Tuns – Kognitive Aspekte der Handlungstheorie.* Bd. 1, Klett Verlag, Stuttgart, 1980.

[Aebli 1981] Aebli, Hans: *Denken, das Ordnen des Tuns – Denkprozesse.* Bd. 2, Klett Verlag, Stuttgart, 1981.

[Aebli 1983] Aebli, Hans: *Zwölf Grundformen des Lehrens – eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage.* Klett Verlag, Stuttgart, 1983.

[Aebli 1985] Aebli, Hans: Das operative Prinzip. *Mathematik lehren*, H. 11, 1985, S. 4–6.

[Aeschbacher 1984] Aeschbacher, Urs: Schematische Anschauung – ein gestaltpsychologisches Erbe in Beispielen. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 9, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984, S. 33–43.

[Aeschbacher 1986] Aeschbacher, Urs: *Unterrichtsziel: Verstehen – Über die psychischen Prozesse beim Denken, Lernen und Verstehen.* Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[Aigner 2000] Aigner, Martin: Die Geometrie der Welt. In: Aigner, Martin / Behrends, Ehrhard (Hrsg.): *Alles Mathematik.* Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2000, S. 275–282.

[Altrichter 2004] Altrichter, Herbert: Unterrichtsentwicklung durch forschende Lehrerinnen und Lehrer. In: Gschwend, Rolf / Claude, Armand (Hrsg.): *Unterrichtsentwicklung – zum Stand der Diskussion.* Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren, Bern, 2004, S. 119–134. [erhältlich unter `http://www.edk.ch/PDF_Downloads/Dossiers/Stub21.pdf`]

[Altrichter & Posch 1998] Altrichter, Herbert / Posch, Peter: *Lehrer erforschen ihren Unterricht: eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung.* Julius Klinkhardt Verlag, Bad Heilbrunn, 1998^3.

[Anderson 1996] Anderson, John R.: *Kognitive Psychologie.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996[2].

[Arnold 1988] Arnold, Vladimir I.: Riemannsche Krümmung. In: *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik.* Birkhäuser Verlag, Basel / Boston / Berlin, 1988, S. 305–321.

[Aronson et al. 2004] Aronson, Elliot / Wilson, Timothy / Akert, Robin: *Sozialpsychologie.* Pearson Studium, München, 2004[4].

[Aspinwall et al. 1997] Aspinwall, Leslie / Shaw, Kenneth L. / Presmeg, Norma C.: Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*, H. 33, 1997, S. 301–317. [erhältlich unter `http://www.springerlink.com/content/g4n6317614348660/fulltext.pdf`]

[Bachmann 1975] Bachmann, Heinz: *Einführung in die Analysis.* Sabe Verlag, Zürich, 1975.

[Badr Goetz 2007] Badr Goetz, Nadja: *Das Dialogische Lernmodell – Grundlagen und Erfahrungen zur Einführung einer komplexen didaktischen Innovation in den gymnasialen Unterricht.* Martin Meidenbauer Verlagsbuchhandlung, München, 2007.

[Baierlein et al. 1993] Baierlein, Marianne / Barth, Friedrich / Greifenegger, Ulrich / Krumbacher, Gerd: *Anschauliche Analysis.* Bd. 1, Ehrenwirth Verlag, München, 1993[25].

[Bannert & Schnotz 2006] Bannert, Maria / Schnotz, Wolfgang: Vorstellungsbilder und Imagery-Strategien. In: Mandl, Heinz / Friedrich, Helmut F. (Hrsg.): *Handbuch Lernstrategien.* Hogrefe Verlag, Göttingen / Bern / Wien, 2006, S. 72–88.

[von Baravalle 1957] von Baravalle, Hermann: *Geometrie als Sprache der Formen.* Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1957.

[Bauer 1978] Bauer, Ludwig: *Mathematische Fähigkeiten – Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben.* Schöningh Verlag, Paderborn, 1978.

[Bauer 1988] Bauer, Ludwig: *Mathematik und Subjekt: eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht.* Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden, 1988.

[Bauer 1989] Bauer, Ludwig: Interesse als mathematikdidaktische Kategorie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 2, 1989, S. 141–171.

[Bauer 1990] Bauer, Ludwig: Mathematikunterricht und Reflexion. *Mathematik lehren*, H. 38, 1990, S. 6–9.

[Bauersfeld 1983] Bauersfeld, Heinrich: Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlagen einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: *Lernen und Lehren von Mathematik – Analysen zum Unterrichtshandeln.* Aulis Verlag Deubner & Co., Köln, 1983, S. 1–56.

[Beerman et al. 1992] Beerman, Lilly / Heller, Kurt A. / Menacher, Pauline: *Mathe: nichts für Mädchen? Begabung und Geschlecht am Beispiel von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik.* Hans Huber Verlag, Bern, 1992.

[Besuden 1992 a] Besuden, Heinrich: Aufgaben aus der Topologie zur Förderung der Raumanschauung. *Mathematik in der Schule*, H. 10, 1992, S. 522–527.

[Besuden 1992 b] Besuden, Heinrich: Aufgaben aus der herkömmlichen Geometrie zur Förderung der Raumanschauung. *Mathematik in der Schule*, H. 11, 1992, S. 585–588.

[Besuden 1992 c] Besuden, Heinrich: Aufgaben aus der herkömmlichen Geometrie zur Förderung der Raumanschauung. *Mathematik in der Schule*, H. 12, 1992, S. 641–645.

[Biermann 2003] Biermann, Mark: Welche Vorstellungen haben Zehntklässler von Funktionen? Konzeption und erste Ergebnisse einer explorativen Studie. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 113–116.

[Bikner-Ahsbahs 2005] Bikner-Ahsbahs, Angelika: *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation: Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005.

[Blum et al. 2004] Blum, Werner / vom Hofe, Rudolf / Jordan, Alexander / Kleine, Michael: Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland – Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000.* Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden, 2004, S. 145–158.

[Borromeo-Ferri 2002] Borromeo-Ferri, Rita: Erste Ergebnisse einer empirischen Studie zu mathematischen Denkstilen von Schülerinnen und Schülern der 9. und 10. Klasse. In: Peschek, Werner (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002, S. 123–126.

[Borromeo-Ferri 2003] Borromeo-Ferri, Rita: Mathematische Denkstile – visuell, analytisch, konzeptuell und ihre Präferenzen bei Jugendlichen am Ende der

Sekundarstufe. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 141–144.

[Büchter & Leuders 2005] Büchter, Andreas / Leuders, Timo: *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin, 2005.

[Bürg & Mandl 2004] Bürg, Oliver / Mandl, Heinz: *Akzeptanz von E-Learning in Unternehmen.* Forschungsbericht 167, Institut für Pädagogische Psychologie, Ludwig-Maximilians-Universität München, April 2004.

[Burton 1999] Burton, Leone: Mathematicians and their Epistemologies – and the Learning of Mathematics. In: Schwank, Inge (Hrsg.): *European Research in Mathematics Education.* Bd. 1, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück, 1999, S. 87–102. [erhältlich unter `www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings-1-v1-0-2.pdf`]

[Carter 1983] Carter, Brenda: Number Lines. *Mathematics Teaching*, H. 106, 1983, S. 2–6.

[Coradi et al. 2003] Coradi, Maja / Denzler, Stefan / Grossenbacher , Silvia / Vanhooydonck, Stéphanie: *Keine Lust auf Mathe, Physik, Technik? Zugang zu Mathematik, Naturwissenschaften und Technik attraktiver und geschlechtergerecht gestalten.* Schweizerische Koordinationsstelle für Bildungsforschung, Aarau, 2003.

[Deci & Ryan 1993] Deci, Edward L. / Ryan, Richard M.: Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik.* H. 2, 1993, S. 223–238.

[Döhrmann 2005] Döhrmann, Martina: Schülervorstellungen zum Begriff Zufall. In: Graumann, Günter (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005, S. 167–170.

[Dörfler 2003] Dörfler, Willibald: Diagrammatisches Denken in der Linearen Algebra. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 189–192.

[Douville & Pugalee 2003] Douville, Patricia / Pugalee, David K.: Investigating the Relationship between Mental Imaging and Mathematical Problem Solving. In: Rogerson, Alan (Hrsg.): *Proceedings of the International Conference* The Decidable and the Undecidable in Mathemtatics Education. 2003, S. 62–67. [erhältlich unter `http://www.math.unipa.it/~grim/21_project/21_brno03_Douville.pdf`]

[Duit 2006] Duit, Reinders: *Students' and Teachers' Conceptions and Science Education – Bibliography.* Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, Universität Kiel, Version Februar 2006. [erhältlich unter http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/]

[Duit & Häußler 1997] Duit, Reinders / Häußler, Peter: Physik und andere naturwissenschaftliche Lernbereiche. In: Weinert, Franz E. (Hrsg.): *Psychologie des Unterrichts und der Schule.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1997, S. 427–460.

[EDK 2001] Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren: *Das schweizerische Bildungswesen – Schweizer Beitrag für die Datenbank „Eurybase – the Information Database on Education Systems in Europe".* Stand 1. 1. 2001. [erhältlich unter http://www.edk.ch/d/BildungswesenCH/bwch_eurydice.html]

[Einsiedler 1996] Einsiedler, Wolfgang: Wissensstrukturierung im Unterricht – Neuere Forschung zur Wissensrepräsentation und ihre Anwendung in der Didaktik. *Zeitschrift für Pädagogik*, H. 2, 1996, S. 167–191.

[Engelkamp 1997] Engelkamp, Johannes: *Das Erinnern eigener Handlungen.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1997.

[Eschenburg 1998] Eschenburg, Jost-Hinrich: Professorenmathematik für Mathematikprofessoren? *Mathematik lehren*, H. 86, 1998, S. 51–54.

[Euklid 1973] Euklid: *Die Elemente.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1973.

[Eysenck & Keane 2000] Eysenck, Michael W. / Keane, Mark: *Cognitive Psychology – A Student's Handbook.* Psychology Press, Hove, 2000, S. 243–278.

[Farian & Jahnke 2005] Farian, Steffen / Jahnke, Thomas: Mathe-Welt – Grenzwerte. In: Kuntze, Sebastian (Hrsg.): *Mathematik lehren*, H. 132, 2005, S. 27–42.

[Fatzer 1998] Gerhard Fatzer: *Ganzheitliches Lernen: Humanistische Pädagogik, Schul- und Organisationsentwicklung.* Junfermannsche Verlagsbuchhandlung, Paderborn, 1998.

[Fauser 2003] Fauser, Peter: Lernen als innere Wirklichkeit – Über Imagination, Lernen und Verstehen. In: Rentschler, Ingo et al. (Hrsg.): *Bilder im Kopf – Texte zum imaginativen Lernen.* Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 2003, S. 242–286.

[Fauser & Madelung 1996] Fauser, Peter / Madelung, Eva (Hrsg.): *Vorstellungen bilden – Beiträge zum imaginativen Lernen.* Friedrich Verlag, Seelze, 1996.

[Fend 1995] Fend, Helmut: Von Systemmerkmalen des Schulsystems zur Qualität des Unterrichts und Lernens in Schulklassen. Mehrebenenanalytische Konzepte der Qualität im Bildungswesen. In: Trier, Uri P.: *Wirksamkeitsanalysen von Bildungssystemen*, Schweizerische Koordinationsstelle für Bildungsforschung, Bern, 1995, S. 182–195.

[Fend 1998] Fend, Helmut: *Qualität im Bildungswesen – Schulforschung zu Systembedingungen, Schulprofilen und Lehrerleistung.* Juventa Verlag, Weinheim / München, 1998.

[Fichten 1993] Fichten, Wolfgang: *Unterricht aus Schülersicht: die Schülerwahrnehmung von Unterricht als erziehungswissenschaftlicher Gegenstand und ihre Verarbeitung im Unterricht.* Europäische Hochschulschriften, Bd. 562, Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M. / Berlin, 1993.

[Fischer 1976] Fischer, Roland: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, H. 3, 1976, S. 185–192.

[Fischer 2003] Fischer, Roland: Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit. In: Hefendehl-Hebeker, Lisa / Hußmann, Stephan (Hrsg.): *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie – Festschrift für Norbert Knoche.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 42–52.

[Fischer 2004] Fischer, Astrid: Vektorraumstrukturen in den Vorstellungen von Studenten. In: Heinze, Aiso / Kuntze, Sebastian (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2004, S. 169–172.

[Fischer & Malle 1985] Fischer, Roland / Malle, Günther: *Mensch und Mathematik – eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim / Wien / Zürich, 1985.

[Flammer 2003] Flammer, August: *Entwicklungstheorien – Psychologische Theorien der menschlichen Entwicklung.* Verlag Hans Huber, Bern / Göttingen, 2003^3.

[Flechsig 1996] Flechsig, Karl-Heinz: *Handbuch didaktischer Modelle.* Neuland Verlag, Eichenzell, 1996. [erhältlich unter `http://www.ikud.de/handbuch.htm` sowie unter `http://www.wipaed.wiso.uni-goettingen.de/~ppreiss/didaktik/Flechsig.html`]

[Freudenthal 1991] Freudenthal, Hans: *Revisiting Mathematics Education – China Lectures.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[Frey & Frey-Eiling 2004] Frey, Karl / Frey-Eiling, Angela (Hrsg.): *Allgemeine Didaktik – Arbeitsunterlagen zur Vorlesung.* Institut für Verhaltenswissenschaft, ETH Zentrum, Zürich, 2004^{17}.

[Friedrich & Mandl 1992] Friedrich, Helmut F. / Mandl, Heinz: Lern- und Denkstrategien – ein Problemaufriss. In: *Lern- und Denkstrategien: Analysen und Intervention.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1992, S. 3–54.

[Führer 1985] Führer, Lutz: Funktionales Denken: Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen. *Mathematik lehren*, H. 11, 1985, S. 12–13.

[Gallin & Ruf 1995] Gallin, Peter / Ruf, Urs: *Ich – Du – Wir: Lehrmittel des 1.–3. Schuljahres.* Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1995.

[Gallin & Ruf 1998] Gallin, Peter / Ruf, Urs: *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 1998. [Die text-, aber nicht seitengleiche Originalausgabe ist 1990 beim Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz (LCH) erschienen.]

[Galperin 1969] Galperin, Pjotr J.: Die Entwicklung der Untersuchungen über die Bildung geistiger Operationen. In: Hiebsch, Hans (Hrsg.): *Ergebnisse der sowjetischen Psychologie*, Klett Verlag, Stuttgart, 1969, S. 367–405.

[Galperin 1974] Galperin, Pjotr J.: Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen. In: Galperin, Pjotr J. et al. (Hrsg.): *Probleme der Lerntheorie.* VEB Volk und Wissen, Berlin, 1974^4, S. 33–49.

[Galperin & Talysina 1974] Galperin, Pjotr J. / Talysina, Nina F.: Die Bildung erster geometrischer Begriffe auf der Grundlage organisierter Handlungen der Schüler. In: Galperin, Pjotr J. et al. (Hrsg.): *Probleme der Lerntheorie.* VEB Volk und Wissen, Berlin, 1974^4, S. 106–130.

[Galperin et al. 1974] Galperin, Pjotr J. / Saporoshez, Alexander W. / Elkonin, Daniil B.: Probleme des Erwerbs von Kenntnissen und Fertigkeiten und neue Unterrichtsmethoden in der Schule. In: Galperin, Pjotr J. et al. (Hrsg.): *Probleme der Lerntheorie.* VEB Volk und Wissen, Berlin, 1974^4, S. 66–81.

[Galton 1880] Galton, Francis: Visualised numerals. *Nature*, H. 21, 1880, S. 252–256.

[Galton 1883] Galton, Francis: *Inquiries into Human Faculty and its Development.* Macmillan, London, 1883. [erhältlich unter `http://www.mugu.com/galton/books/human-faculty/text/html/index.html`]

[von Glasersfeld 1998] von Glasersfeld, Ernst: *Radikaler Konstruktivismus.* Suhrkamp Verlag, Frankfurt a. M., 1998.

[Grüßing 2003] Grüßing, Meike: Räumliche Kompetenzen und Mathematikleistung – erste Ergebnisse einer empirischen Studie mit Kindern des vierten Schuljahres. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 261–264.

[Guderian 1990] Guderian, Dietmar: *Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre*. Bannstein Verlag, Ebringen i. Br., 1990.

[Gudjons 1992] Gudjons, Herbert: *Handlungsorientiert Lehren und Lernen: Schüleraktivierung – Selbsttätigkeit – Projektarbeit.* Julius Klinkhardt Verlag, Bad Heilbrunn, 1992^3.

[Häcker & Stapf 1998] Häcker, Hartmund / Stapf, Kurt (Hrsg.): *Dorsch – Psychologisches Wörterbuch*. Hans Huber Verlag, Bern, 1998^{14}.

[Hadamard 1949] Hadamard, Jacques: *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Dover Publications, New York, 1949. [Die 1959 bei Librairie scientifique Albert Blanchard (Paris) erschienene französische Ausgabe ist demgegenüber leicht erweitert.]

[Halbeisen & Hungerbühler 1997] Halbeisen, Lorenz / Hungerbühler, Norbert: Optimal Bounds for the Length of Rational Collatz Cycles. *Acta Arithmetica*, H. 78, 1997, S. 227 – 239. [erhältlich unter `http://www.iam.unibe.ch/~halbeis/publications/pdf/collatz.pdf`]

[Hannover & Kessels 2003] Hannover, Bettina / Kessels, Ursula: Der Einfluss des Image der Mathematik auf die schulische Interessen- und Leistungsentwicklung. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik*. Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 15–22.

[Hannover & Kessels 2004] Hannover, Bettina / Kessels, Ursula: Self-to-prototype matching as a strategy for making academic choices. Why high school students do not like math and science. *Learning and Instruction*, H. 14, 2004, S. 51–67. [erhältlich unter `http://www.ewi-psy.de/dfg-projekte/image/HannoverKesselsLearningInstruction2004.pdf`]

[Hart 1998] Hart, Kathleen M.: Basic Criteria for Research in Mathematics Education. In: Sierpinska, Anna / Kilpatrick, Jeremy (Hrsg.): *Mathematics Education as a Research Domain – A Search for Identity.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, S. 409–413.

[Hartmann & Hellmich 2002] Hartmann, Jens / Hellmich, Frank: Materialgebundene versus computerunterstützte Förderung räumlicher Kompetenzen in der Grundschule. In: Peschek, Werner (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002, S. 211–214.

[Hasselhorn 2001] Hasselhorn, Marcus: Metakognition. In: Rost, Detlef H. (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001^2, S. 466–471.

[Hefendehl-Hebeker 1995] Hefendehl-Hebeker, Lisa: Interpretative Unterrichtsforschung. *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, H. 2, 1995, S. 73–80.

[Hefendehl-Hebeker 2004 a] Hefendehl-Hebeker, Lisa: Selbstgesteuertes Lernen im Dialog. *Der Mathematikunterricht*, H. 3, 2004, S. 45–51.

[Hefendehl-Hebeker 2004 b] Hefendehl-Hebeker, Lisa: Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, Horst et al. (Hrsg.): *Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken.* Studienverlag, Innsbruck / Wien / Bozen, 2004, S. 141–189.

[Heintz 2000] Heintz, Bettina: *Die Innenwelt der Mathematik – Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Springer Verlag, Wien / New York, 2000.

[Heinze & Wiedenhofer 2005] Heinze, Aiso / Wiedenhofer, Liane: Vorstellungen von Studierenden über das Lehren und Lernen von Mathematik. In: Graumann, Günter (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005, S. 247–250.

[Helmke 2004] Helmke, Andreas: *Unterrichtsqualität – erfassen, bewerten, verbessern.* Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 2004[3].

[Helmke & Weinert 1997] Helmke, Andreas / Weinert, Franz E.: Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In: Weinert, Franz E. (Hrsg.): *Psychologie des Unterrichts und der Schule.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1997, S. 71–175.

[von Hentig 1980] von Hentig, Hartmut: *Die Krise des Abiturs und eine Alternative.* Klett Verlag, Stuttgart, 1980.

[Hess 2003] Hess, Kurt: *Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Didaktische Hintergründe und empirische Untersuchung zum Lehrverständnis und dessen Umsetzung im mathematischen Erstunterricht.* h.e.p. Verlag, Bern, 2003.

[Heymann 1996] Heymann, Hans Werner: *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz Verlag, Weinheim / Basel, 1996.

[Hischer 2002] Hischer, Horst: *Zur Geschichte des Funktionsbegriffs.* Preprint, Saarbrücken, 2002. [erhältlich unter `http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint54.pdf`]

[vom Hofe 1995] vom Hofe, Rudolf: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.

[vom Hofe 2003] vom Hofe, Rudolf: Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*, H. 118, 2003, S. 4–8.

[Hußmann 2002] Hußmann, Stephan: *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002.

[Hußmann 2004] Hußmann, Stephan: Selbstgesteuertes Lernen – ein Grundbedürfnis des Menschen. *Der Mathematikunterricht*, H. 3, Juni 2004, S. 5–24.

[Hyde et al. 1990 a] Hyde, Janet Sh. / Fennema, Elizabeth / Lamon, Susan J.: Gender Differences in Mathematics Performances: A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin*, H. 107, 1990, S. 139–155.

[Hyde et al. 1990 b] Hyde, Janet Sh. / Fennema, Elizabeth / Ryan, Marilyn / Frost, Laurie A. / Hopp, Carolin: Gender Comparisons of Mathematics Attitudes and Affect: A Meta-Analysis. *Psychology of Women Quarterly*, H. 14, 1990, S. 299–324.

[Jahnke-Klein 1997] Jahnke-Klein, Sylvia: Meditative Verfahren im Mathematikunterricht. In: Glagow-Schicha, Lisa et al. (Hrsg.): *Für Ada, Marie und andere Mädchen. Beispiele für mädchengerechteren Unterricht in Mathematik, Informatik, Technik und Naturwissenschaften.* IKÖ-Diskussionsforum, H. 1, 1997, Duisburg, S. 17-25.

[Jahnke-Klein 2001] Jahnke-Klein, Sylvia: *Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen.* Schneider Verlag, Hohengehren, 2001.

[Jahnke-Klein 2004] Jahnke-Klein, Sylvia: Wünschen Mädchen sich einen anderen Unterricht als Jungen? *Mathematik lehren*, H. 127, 2004, S. 15–19.

[Kaiser & Kaiser 1999] Kaiser, Armin / Kaiser, Ruth: *Metakognition – Denken und Problemlösen optimieren.* Luchterhand Verlag, Neuwied / Kriftel, 1999.

[Kasten 2001] Kasten, Hartmut: Geschlechtsunterschiede. In: Rost, Detlef H. (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001^2. S. 212–219.

[Kautschitsch 1984] Kautschitsch, Hermann: Die Bedeutung des bewegten Bildes für den Mathematikunterricht. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 9, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1984, S. 134–157.

[Kautschitsch 1987] Kautschitsch, Hermann: Ein „optisches Lexikon“ für die Mathematik. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Medien zur Veranschaulichung von Mathematik.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 15, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1987, S. 223–232.

[Keller 1998] Keller, Carmen: *Geschlechterdifferenzen in der Mathematik – Prüfung von Erklärungsansätzen. Eine mehrebenenanalytische Untersuchung im Rahmen der „Third International Mathematics and Science Study“.* Zentralstelle der Studentenschaft, Universität Zürich, 1998.

[Kessels & Hannover 2004] Kessels, Ursula / Hannover, Bettina: Entwicklung schulischer Interessen als Identitätsregulation. In: Doll, Jörg / Prenzel, Manfred

(Hrsg.): *Bildungsqualität von Schule – Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Waxmann Verlag, München, 2004, S. 398–412.

[Klauer 2001] Klauer, Karl J.: Forschungsmethoden der Pädagogischen Psychologie. In: Krapp, Andreas / Weidenmann, Bernd (Hrsg.): *Pädagogische Psychologie – ein Lehrbuch.* Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001[4], S. 75–98.

[Klein 2004] Klein, Richard: *Spiele als Zugang zur Polyedergeometrie.* Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2004. [erhältlich unter `http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/student/klein/diplomarbeit_klein.pdf`]

[Klieme 1987] Klieme, Eckhard: Bildliches Denken – kognitionspsychologische Modelle und didaktische Strategien. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Medien zur Veranschaulichung von Mathematik.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 15, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1987, S. 43–67.

[KMK 2004] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) – Beschluss vom 4. 12. 2003.* Wolters Kluwer, München, 2004. [erhältlich unter `http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf`]

[Köller et al. 2000] Köller, Olaf / Baumer, Jürgen / Schnabel, Kai: Zum Zusammenspiel von schulischem Interesse und Lernen im Fach Mathematik: Längsschnittanalysen in den Sekundarstufen I und II. In: Schiefele, Ulrich / Wild, Klaus-Peter (Hrsg.): *Interesse und Lernmotivation – Untersuchungen zu Entwicklung, Förderung und Wirkung.* Waxmann Verlag, Münster, 2000, S. 163–181.

[Kollmann 1998] Kollmann, Tobias: *Akzeptanz innovativer Nutzungsgüter und -systeme.* Gabler Verlag, Wiesbaden, 1998.

[Komorek et al. 2003] Komorek, Evelyn / Bruder, Regina / Schmitz, Bernhard: Wie kann man Lehrervorstellungen über Aufgaben erfassen? Adaption der Repertory Grid Technik. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 361–364.

[Krainer et al. 1999] Krainer, Konrad / Goffree, Fred / Berger, Peter (Hrsg.): *European Research in Mathematics Education. From a Study of Teaching Practices to Issues in Teacher Education.* Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Bd. 3, Osnabrück, 1999. [erhältlich unter `http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-group3.pdf`]

[Krapp 2001] Krapp, Andreas: Interesse. In: Rost, Detlef H. (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001^2. S. 286–294.

[Kreienbaum & Metz-Göckl 1992] Kreienbaum, Maria A. / Metz-Göckel, Sigrid: *Koedukation und Technikkompetenz von Mädchen – der heimliche Lehrplan von Mädchen und wie man ihn ändert.* Juventa Verlag, Weinheim / München, 1992.

[Krüger 2000 a] Krüger, Katja: *Erziehung zum funktionalen Denken – zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips.* Logos Verlag, Berlin, 2000.

[Krüger 2000 b] Krüger, Katja: Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, H. 47, 2000, S. 221–241.

[Krummheuer & Naujok 1999] Krummheuer, Götz / Naujok, Natalie: *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Leske und Budrich, Opladen, 1999.

[Kruse & Ruhmann 2006] Kruse, Otto / Ruhmann, Gabriele: Prozessorientierte Schreibdidaktik: Eine Einführung. In: Kruse, Otto et al. (Hrsg.): *Prozessorientierte Schreibdidaktik – Schreibtraining für Schule, Studium und Beruf.* Haupt Verlag, Bern / Stuttgart / Wien, 2006.

[Kuntze 2004] Kuntze, Sebastian: Vorstellungen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern zur Unterrichtsqualität. In: Heinze, Aiso / Kuntze, Sebastian (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2004, S. 321–324.

[Kwak 2005] Kwak, Jeeyi: Pupils' Competence in Proofs and Argumentation and their Beliefs on Mathematics – a Comparative Study between Korea and Germany. In: Graumann, Günter (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005, S. 331–334.

[Lagarias 1985] Lagarias, Jeffrey C.: The $3x + 1$-Problem and its Generalizations. *American Mathematical Monthly*, H. 92, 1985, S. 3–25. [erhältlich unter `http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/index.html`]

[Lakoff & Núñez 2000] Lakoff, George / Núñez, Rafael: *Where Mathematics Comes From – How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* Basic Books, New York, 2000.

[Lamnek 2005] Lamnek, Siegfried: *Qualitative Sozialforschung: Lehrbuch.* Beltz Verlag, Weinheim / Basel, 2005^4.

[Lauber 1997] Lauber, Elke: Wohnen in Würfelhäusern. *Mathematik lehren*, H. 80, 1997, S. 12–15.

[Lengnink 2003] Lengnink, Katja: *Situative Vorstellungswelten von Lernenden und mathematische Grundvorstellungen – Auf dem Weg zur mathematischen Mündigkeit.* Preprint Nr. 2291 (unveröffentlicht), Technische Universität Darmstadt, 2003.

[Lengnink 2005 a] Lengnink, Katja: *Didaktische Konzeptionen zur Vorstellungsveränderung beim Mathematiklernen.* Unveröffentlichte Folien des Vortrags auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik, Bielefeld, 2005.

[Lengnink 2005 b] Lengnink, Katja: „Abhängigkeit von Größen" – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt. *Praxis der Mathematik in der Schule*, H. 2, 2005, S. 13–19.

[Lengnink 2005 c] Lengnink, Katja: Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In: Lengnink, Katja / Siebel, Franziska (Hrsg.): *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen.* Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, 2005, S. 21–36.

[Leuders 2001] Leuders, Timo: *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin, 2001.

[Leuders 2004] Leuders, Timo: Selbständiges Lernen und Leistungsbewertung. *Der Mathematikunterricht*, H. 3, 2004, S. 63–79.

[Lompscher 1994] Lompscher, Joachim: *Was ist und was will Psychologische Didaktik?* Interdisziplinäres Zentrum für Lern- und Lehrforschung, Universität Potsdam, 1994. [erhältlich unter `http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2005/445/`]

[Lompscher 2001] Lompscher, Joachim: Lehrstrategien. In: Rost, Detlef H. (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001^2, S. 394–401.

[Lorenz 1992] Lorenz, Jens Holger: *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1992.

[Lucke 1995] Lucke, Doris: *Akzeptanz – Legitimität in der „Abstimmungsgesellschaft".* Leske und Budrich, Opladen, 1995.

[Lucke & Hasse 1998] Lucke, Doris / Hasse, Michael (Hrsg.): *Annahme verweigert – Beiträge zur soziologischen Akzeptanzforschung.* Leske und Budrich, Opladen, 1998.

[Luminet et al. 1999] Luminet, Jean-Pierre / Starkman, Glen D. / Weeks, Jeffrey R.: Ist der Raum endlich? *Spektrum der Wissenschaft*, Heidelberg, Juli 1999, S. 50–57.

[Lurija 2003] Lurija, Alexander R.: Kleines Portrait eines großen Gedächtnisses. In: Rentschler, Ingo et al. (Hrsg.): *Bilder im Kopf – Texte zum imaginativen Lernen.* Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 2003, S. 72–98.

[Maier 1996] Maier, Peter H.: Kopfgeometrie – handlungsorientierte und visuelle Aufgabenstellungen. *Mathematik in der Schule*, H. 34, 1996, S. 276–284.

[Maier 1999] Maier, Peter H.: *Räumliches Vorstellungsvermögen.* Auer Verlag, Donauwörth, 1999.

[Maier & Schweiger 1999] Maier, Hermann / Schweiger, Fritz: *Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* öbv & hpt Verlag, Wien, 1999.

[Maier & Voigt 1991] Maier, Hermann / Voigt, Jörg (Hrsg.): *Interpretative Unterrichtsforschung*, IDM, Bd. 17, Aulis Verlag Deubner & Co., Köln, 1991.

[Marx & Engels 1961] Marx, Karl / Engels, Friedrich: *Kritik der politischen Ökonomie.* Werke, Bd. 13, Dietz Verlag, Berlin, 1961. [erhältlich unter `http://www.mlwerke.de/me/me13/me13_007.htm`]

[Marx & Engels 1969] Marx, Karl / Engels, Friedrich: *Die deutsche Ideologie.* Werke, Bd. 3, Dietz Verlag, Berlin, 1969. [erhältlich unter `http://www.mlwerke.de/me/me03/me03_017.htm`]

[Mason 2002] Mason, John H.: Exploiting Mental Imagery in Teaching And Learning Mathematics. *Actas ProfMat*, Conf 13, 2002, S. 75–81. [erhältlich unter `http://cme.open.ac.uk/JHM_Publications/Mental_Imagery_Portugal_02.pdf`]

[Metzger 1975] Metzger, Wolfgang: *Gesetze des Sehens – Die Lehre vom Sehen der Formen und Dinge des Raumes und der Bewegung.* Verlag Waldemar Kramer, Frankfurt a. M., 1975[3].

[Metzger 1986] Metzger, Wolfgang: *Gestaltpsychologie.* Verlag Waldemar Kramer, Frankfurt a. M., 1986.

[Meyer 1996] Meyer, Hilbert: *Unterrichtsmethoden: Theorieband.* Cornelsen Verlag Scriptor, Frankfurt a. M., 1996[7].

[Möller 2002] Möller, Angelika: Individuelle Auffassungen von Grundschullehrerinnen über das Lehren und Lernen von Problemlösen im Mathematikunterricht. In: Peschek, Werner (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002, S. 343–346.

[Morton 1936] Morton, Dan M.: Number Forms and Arithmetical Ability in Children. *British Journal of Educational Psychology*, H. 6, 1936, S. 58–73.

[Moser 2001] Moser, Urs: *Für das Leben gerüstet? Die Grundkompetenzen der Jugendlichen – Kurzfassung des nationalen Berichts PISA 2000.* Bundesamt für Statistik und Schweizerische Konferenz der kantonalen Bildungsdirektoren, Neuchâtel, 2001. [erhältlich unter `http://www.portal-stat.admin.ch/pisa/download/pisa-d.pdf`]

[Moser et al. 1997] Moser, Urs / Ramseier, Erich / Keller, Carmen / Huber, Maja: *Schule auf dem Prüfstand: Eine Evaluation der Sekundarstufe I auf der Grundlage der „Third International Mathematics and Science Study".* Rüegger Verlag, Chur / Zürich, 1997.

[Müller 1913] Müller, Georg E.: Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufs. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane*, Ergänzungsbd. 8, Teil 3, 1913, S. 72–181.

[Müller et al. 1997] Müller, Gerhard / Steinbring, Heinz / Wittmann, Erich Ch. (Hrsg.): *10 Jahre „mathe 2000" – Bilanzen und Perspektiven.* Klett Verlag, Düsseldorf, 1997.

[Müller-Böling & Müller 1986] Müller-Böling, Detlef / Müller, Michael: *Akzeptanzfaktoren der Bürokommunikation.* R. Oldenburg Verlag, München / Wien, 1986.

[Neubrand 1990] Neubrand, Michael: Stoffvermittlung und Reflexion – mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *mathematica didactica*, H. 1, 1990, S. 21–48.

[Núñez & Lakoff 1998] Núñez, Rafael / Lakoff, George: What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and epsilon-delta continuity. *Mathematical Cognition*, H. 2, 1998, S. 85–101. [erhältlich unter `http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/edMC.pdf`]

[Núñez & Lakoff 2004] Núñez, Rafael / Lakoff, George: Do Real Numbers Really Move? Language, Thought and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics. In: Iida, Fumiya et al. (Hrsg.): *Embodied Artificial Intelligence.* Springer Verlag, Berlin, 2004, S. 54–73. [erhältlich unter `http://cogsci.ucsd.edu/~nunez/COGS200/nunez+pdf.pdf`]

[Oser 2005] Oser, Fritz: *Lernen ist schmerzhaft – zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur.* Beltz Verlag, Weinheim / Basel, 2005.

[Parkin 1996] Parkin, Alan: *Gedächtnis.* Psychologie Verlags Union, Weinheim, 1996.

[Pehkonen 1995] Pehkonen, Erkki: Vorstellungen von Schülern zur Mathematik. *mathematica didactica*, H. 1, 1995, S. 35–65.

[Peschek 2001] Peschek, Werner: Außermathematische Vorstellungen und mathematische Konzepte – eine spannungsgeladene Verwandtschaft. In: Kaiser, Gabriele (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2001, S. 484–487.

[Peters 1985] Peters, Wilhelm: Visualisierung zum Winkelsatz. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Anschauung und mathematische Modelle.* Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Bd. 13, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1985, S. 163–172.

[Peterßen 2001] Peterßen, Wilhelm H.: *Kleines Methoden-Lexikon.* Oldenbourg Verlag, München, 2001^2.

[Piaget 1966] Piaget, Jean: *Psychologie der Intelligenz.* Rascher Verlag, Zürich / Stuttgart, 1966^2.

[PISA 2003] *Lernen für die Welt von morgen – erste Ergebnisse von PISA 2003.* OECD, 2004. [erhältlich unter `http://www.oecd.org/dataoecd/18/10/34022484.pdf`]

[Pólya 1949] Pólya, Georg: *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Francke Verlag, Tübingen / Basel, 1949.

[Pólya 1966] Pólya, Georg: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren.* Bd. 1, Birkhäuser Verlag, Basel / Stuttgart, 1966.

[Pólya 1967] Pólya, Georg: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben – Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren.* Bd. 2, Birkhäuser Verlag, Basel / Stuttgart, 1967.

[Prediger 2002] Prediger, Susanne: Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In: Peschek, Werner (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002, S. 399–402.

[Prediger 2004] Prediger, Susanne: *Mathematiklernen in interkultureller Perspektive – mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen.* Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Profil-Verlag, München / Wien, 2004.

[Prediger 2006] Prediger, Susanne: Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, H. 11, 2006, S. 8–12.

[Presmeg 1985] Presmeg, Norma C.: *The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics – a Classroom Investigation.* Unpublished Ph. D. Dissertation, University of Cambridge, 1985.

[Presmeg 1986] Presmeg, Norma C.: Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, H. 3, 1986, S. 42–46.

[Presmeg 1992] Presmeg, Norma C.: Prototypes, Metaphors, Metonymies and Imaginative Rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, H. 23, 1992, S. 595–610.

[Presmeg 1997] Presmeg, Norma C.: Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In: English, Lyn D.:*Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah / London, 1997, S. 267–279.

[Presmeg 2004] Presmeg, Norma C.: Use of Personal Metaphors in the Learning of Mathematics. Unpublished Paper, 10^{th} International Congress of Mathematics Education, Kopenhagen, 2004. [erhältlich unter `http://www.icme-organisers.dk/tsg25/plenary/presmeg.doc`]

[Presmeg & Bergsten 1995] Presmeg, Norma C. / Bergsten, Christer: Preference for Visual Methods – An International Study. In: Meira, Luciano / Carraher, David (Hrsg.): *Proceedings of the 19^{th} Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Recife, 1995, S. 58–65.

[Ramseier et al. 1999] Ramseier, Erich / Keller, Carmen / Moser, Urs: *Bilanz Bildung: Eine Evaluation am Ende der Sekundarstufe II auf der Grundlage der „Third International Mathematics and Science Study“.* Rüegger Verlag, Chur / Zürich, 1999.

[Rausch 1984] Rausch, Adly: *Galperin und Piaget – eine Analyse und ein Vergleich.* Angerer Verlag, München, 1984.

[Reimann-Rothmeier & Mandl 2001] Reimann-Rothmeier, Gabi / Mandl, Heinz: Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Krapp, Andreas / Weidenmann, Bernd (Hrsg.): *Pädagogische Psychologie*, Beltz Verlag, Weinheim, 2001^4, S. 601–646.

[Reiss & Gritzmann 2003] Reiss, Kristina / Gritzmann, Peter: *Gemeinsame Stellungnahme der Deutschen Mathematikervereinigung (DMV) und der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik (GDM) zu den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“.* 23. August 2003. [erhältlich unter `http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/gdm/stellungnahmen/2003_01.pdf`]

[Reusser 1998] Reusser, Kurt: Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. In: Klix, Friedhart / Spada, Hans (Hrsg.): *Wissen – Enzyklopädie der Psychologie.* Hogrefe Verlag, Göttingen, 1998, S. 115–166.

[Reusser 2001] Reusser, Kurt: Unterricht zwischen Wissensvermittlung und Lernen lernen – Alte Sackgassen und neue Wege in der Bearbeitung eines pädagogischen Jahrhundertproblems. In: Schnaitmann, Gerhard W. (Hrsg.): *Lehren und Lernen im Kontext empirischer Forschung und Fachdidaktik.* Auer Verlag, Donauwörth, 2001, S. 106–140.

[Richardson 1999] Richardson, John T. E.: *Imagery.* Psychology Press, London, 1999.

[Rolka 2005] Rolka, Katrin: Statistische Weltbilder von australischen Studierenden der „biological sciences" – eine empirische Erhebung. In: Graumann, Günter (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005, S. 469–472.

[Roth 2005] Roth, Jürgen: *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2005.

[Ruf 2003] Ruf, Urs: Lerndiagnostik und Leistungsbewertung in der Dialogischen Didaktik. *Pädagogik*, H. 4, 2003, S. 10–16.

[Ruf & Gallin 1998 a] Ruf, Urs / Gallin, Peter: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Bd. 1, Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 1998.

[Ruf & Gallin 1998 b] Ruf, Urs / Gallin, Peter: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Bd. 2, Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze, 1998.

[Ruf & Gallin 1999] Gallin, Peter / Ruf, Urs: *Ich – Du – Wir: Lehrmittel des 4.–6. Schuljahres.* Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999.

[Ryan & Deci 2000] Ryan, Richard M. / Deci, Edward L.: Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, H. 55, 2000, S. 68–78. [erhältlich unter `http://www.psych.rochester.edu/SDT/publications/pub_thry.html`]

[Schanoff 1911] Schanoff, Botju: *Die Vorgänge des Rechnens.* Otto Memrich Verlag, Leipzig, 1911.

[Schiefele & Heinen 2001] Schiefele, Ulrich / Heinen, Stefanie: Wissenserwerb und Motivation. In: Rost, Detlef H. (Hrsg): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* Psychologie Verlags Union, Weinheim, 2001^2, S. 795–799.

[Schiefele et al. 1993] Schiefele, Ulrich / Krapp, Andreas / Schreyer, Inge: Metaanalyse des Zusammenhangs von Interesse und schulischer Leistung. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, H. 25, 1993, S. 120–148.

[Schoenfeld 1985] Schoenfeld, Alain H.: *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Orlando, 1985.

[Schoenfeld 1987 a] Schoenfeld, Alain H.: Cognitive Science and Mathematics Education – An Overview. In: *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1987, S. 1–31.

[Schoenfeld 1987 b] Schoenfeld, Alain H.: What's all the Fuss About Metacognition? In: *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1987, S. 189–215.

[Schoenfeld 2000] Schoenfeld, Alain H.: Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, H. 6, 2000, S. 641–649. [erhältlich unter http://www.ams.org/notices/200006/fea-schoenfeld.pdf]

[Scholz & Törner 2003] Scholz, Katrin / Törner, Günter: Naive Schülervorstellungen zum Mächtigkeitsbegriff von Zahlbereichen. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 569–572.

[Schuberth 1984] Schuberth, Ernst: Aus dem Alltag einer Waldorfschule – Die Winkelsumme der regelmäßigen Vielecke. *Westermanns Pädagogische Beiträge*, H. 3, 1984, S. 118–121.

[Schuberth 1998] Schuberth, Ernst: *Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen.* Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1998.

[Schwank 1994] Schwank, Inge: Zur Analyse kognitiver Mechanismen mathematischer Begriffsbildung unter geschlechtsspezifischem Aspekt. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, H. 2, 1994, S. 31–40.

[Schwank 1996] Schwank, Inge: Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, H. 6, 1996, S. 168–183.

[Schwank 1998] Schwank, Inge: *Kognitive Mathematik.* 1998. [erhältlich unter http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/cognitive_mathematics/schwank_inge/kognitive_mathematik08.htm]

[Schwank 2000] Schwank, Inge: Zum funktionalen / prädikativen Denken und operativen Prinzip im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Neubrand, Michael / Jahnke, Thomas (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2000, S. 579–582.

[Schwank 2003] Schwank, Inge: Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, H. 3, 2003, S. 70–78.

[Schwank 2005] Schwank, Inge: Kinder sind keine Taschenrechner. *Gehirn und Geist*, H. 6, 2005, S. 34–37. [erhältlich unter http://www.wissenschaft-online.de/artikel/779356]

[Siebel 2005] Siebel, Franziska: *Elementare Algebra und ihre Fachsprache – eine allgemein-mathematische Untersuchung.* Verlag Allgemeine Wissenschaft, Darmstadt, 2005.

[Sjuts 1999] Sjuts, Johann: *Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation.* Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik, Bd. 35, Osnabrück, 1999.

[Sjuts 2001] Sjuts, Johann: Metakognition beim Mathematiklernen – das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. *Der Mathematikunterricht*, H. 47, 2001, S. 61–68.

[Sjuts 2003] Sjuts, Johann: Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 24, 2003, S. 18–40.

[Spender 1984] Spender, Dale: Mit Aggressivität zum Erfolg: Über den doppelten Standard, der in den Klassenzimmern operiert. In: Trömel-Plötz, Senta: *Gewalt durch Sprache.* Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt a. M., 1984, S. 71–89.

[Stahel 2002] Stahel, Werner A.: *Statistische Datenanalyse – eine Einführung für Naturwissenschaftler.* Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 2002[4].

[Striethorst 2004] Striethorst, Ansgar: *Über die Unterschiedlichkeit von Vorstellungen beim Gleichungslösen.* Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik, Bd. 37, Osnabrück, 2004.

[Strunz 1968] Strunz, Kurt: *Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht.* Quelle und Meyer Verlag, Heidelberg, 1968. [Erstauflage 1952]

[Szpiro 2006] Szpiro, George: Schwer fassbare dreidimensionale Sphären. *Neue Zürcher Zeitung*, 21. 6. 2006, S. 63. [erhältlich unter `http://nzz.ch/2006/06/21/ft/articleE843O.print.html`]

[Tall 1988] Tall, David: Concept Image and Concept Definition. In: de Lange, Jan / Doorman, Michiel (Hrsg.): *Senior Secondary Mathematics Education.* OW & OC, Utrecht, 1988, S. 37–41. [erhältlich unter `http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot-1988e-concept-image-icme.pdf`]

[Tall & Vinner 1981] Tall, David / Vinner, Shlomo: Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, H. 12, 1981, S. 151–169. [erhältlich unter `http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot-1981a-concept-image.pdf`]

[Törner 2001] Törner, Günter: Mentale Repräsentationen – der Zusammenhang zwischen „Subject-Matter Knowledge“ und „Pedagogical Content Knowledge“, dargestellt am Beispiel der Exponentialfunktionen in einer Fallstudie mit Lehramtsstudenten. In: Kaiser, Gabriele (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2001, S. 628–631.

[Törner 2003] Törner, Günter: Schwierigkeiten bei der mentalen Repräsentation von irrationalen Zahlen – Beobachtungen aus einer Fallstudie mit Schülern. In: Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2003, S. 629–632.

[Vohns 2005] Vohns, Andreas: Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 1, 2005, S. 52–79.

[Voigt 1996] Voigt, Jörg: Empirische Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In: Kadunz, Gert et al. (Hrsg.): *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur „Didaktik der Mathematik“.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1996, S. 361–368.

[Vollrath 1989] Vollrath, Hans-Joachim: Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 1, 1989, S. 3–37.

[Vollrath 1994] Vollrath, Hans-Joachim: Begriffliches Denken im Algebraunterricht. *Der Mathematikunterricht*, H. 4, 1994.

[Vygotskij 2002] Vygotskij, Lev S.: *Denken und Sprechen – Psychologische Untersuchungen.* Beltz Verlag, Weinheim, 2002.

[van der Waerden 1954] van der Waerden, Bartel L.: Denken ohne Sprache. In: Révész, G. (Hrsg.): *Thinking and Speaking.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1954, S. 165–174.

[van der Waerden 1973] van der Waerden, Bartel L.: *Einfall und Überlegung.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1973[3].

[Wagenschein 1965] Wagenschein, Martin: *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken.* Klett Verlag, Stuttgart, 1965.

[Wagenschein 1973] Wagenschein, Martin: *Verstehen lehren: genetisch – sokratisch – exemplarisch.* Beltz Verlag, Weinheim, 1973[4].

[Wartha & vom Hofe 2005] Wartha, Sebastian / vom Hofe, Rudolf: Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *Mathematik lehren*, H. 128, 2005, S. 10–15.

[Weber 1998] Weber, Christof: Mathematische Vorstellungsübungen. *Mathematik lehren*, H. 86, 1998, S. 42–45.

[Weber 2002] Weber Christof: Imaginatives Lernen von Mathematik. In: Peschek, Werner (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf* *der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2002, S. 507–510.

[Weber 2004] Weber, Christof: Die Plus-Mal-Kompetenz – nicht nur in der Grundschule eine große Hürde. In: Heinze, Aiso / Kuntze, Sebastian (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht – Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik.* Franzbecker Verlag, Hildesheim / Berlin, 2004, S. 605–608.

[Weber 2005] Weber, Christof: „Stell dir vor" – Vorstellungsübungen im Geometrieunterricht zur Weiterentwicklung singulärer Vorstellungen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, H. 6, 2005, S. 28–32.

[Weinert 1996] Weinert, Franz E.: Lerntheorien und Instruktionsmodelle. In: *Psychologie des Lernens und der Instruktion – Enzyklopädie der Psychologie.* Bd. 2, Hogrefe Verlag, Göttingen, 1996, S. 1–48.

[Weinert 1997] Weinert, Franz E.: Lernkultur im Wandel. In: Beck, Erwin / Guldimann, Titus / Zutavern, Michael (Hrsg.): *Lernkultur im Wandel.* Tagungsband der Schweizerischen Gesellschaft für Lehrerinnen- und Lehrerbildung und der Schweizerischen Gesellschaft für Bildungsforschung, Fachverlag für Wissenschaft und Studium, St. Gallen, 1997, S. 11–29.

[Weinert 2001] Weinert, Franz E.: Concept of Competence: A Conceptional Clarification. In: Rychen, Dominique S. / Salganik, Laura H. (Hrsg.): *Defining and Selecting Key Competencies.* Hogrefe und Huber, Göttingen, 2001, S. 45–65.

[Wernet 2000] Wernet, Andreas: *Einführung in die Interpretationstechnik der Objektiven Hermeneutik.* Leske und Budrich, Opladen, 2000.

[Wertheimer 1923] Wertheimer, Max: Untersuchungen zur Lehre von der Gestalt. *Psychologische Forschung*, Bd. 4, 1923, S. 301–350.

[Wertheimer 1957] Wertheimer, Max: *Produktives Denken.* Waldemar Kramer Verlag, Frankfurt a. M., 1957.

[Wheatley 1992] Wheatley, Grayson H.: The role of reflection in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, H. 5, 1992, S. 529–541.

[Wiersching 2000] Wiersching, Günther J.: Über das $3n + 1$-Problem. *Elemente der Mathematik*, H. 55, 2000, S. 142–155.

[Wieser 1996] Wieser, Ilsedore: Handlungs- und Aktionsforschung. In: *CD-ROM der Pädagogik.* Schneider Verlag, Hohengehren, 1996. [erhältlich unter `http://plaz.uni-paderborn.de/Service/PLAN/plan.php?id=sw0052`]

[Wille 1983] Wille, Friedrich: Zur Darstellung des Vierdimensionalen. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Mathematische Anschauung und Mathematikfilm.* Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik, Bd. 7, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1983, S. 69–98.

[Wille 1984] Wille, Friedrich: Das Hilbertsche Hotel. In: *Eine mathematische Reise.* Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1984, S. 38–42.

[Winter 2004] Winter, Felix: *Leistungsbewertung – Eine neue Lernkultur braucht einen anderen Umgang mit den Schülerleistungen.* Schneider Hohengehren, Baltmannsweiler, 2004.

[Winter 1991] Winter, Heinrich: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht – Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 1991^2.

[Wittenberg 1963] Wittenberg, Alexander I.: *Bildung und Mathematik – Mathematik als exemplarisches Schulfach.* Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1963.

[Wittmann 1981 a] Wittmann, Erich Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, 1981^6.

[Wittmann 1981 b] Wittmann, Erich Ch.: Beziehungen zwischen operativen „Programmen“ und Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 1, 1981, S. 83–95.

[Wittmann 1985] Wittmann, Erich Ch.: Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren*, H. 11, 1985, S. 7–11.

[Wittmann 1987] Wittmann, Erich Ch.: Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme. In: Kautschitsch, Hermann / Metzler, Wolfgang (Hrsg.): *Medien zur Veranschaulichung von Mathematik.* Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 15, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1987, S. 193–202.

[Wittmann 1994] Wittmann, Erich Ch.: Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, Erich, Ch. / Müller, Gerhard (Hrsg.): *Handbuch produktiver Rechenübungen – Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Bd. 1, Klett Verlag, Stuttgart / Düsseldorf / Berlin / Leipzig, 1994^2, S. 157–171.

[Wolff 1962] Wolff, Georg (Hrsg.): *Handbuch der Schulmathematik: Geometrie der Unter- und Mittelstufe.* Bd. 3, Schroedel Verlag, Hannover, 1962.

[Zahner Rossier 2005] Zahner Rossier, Claudia (Hrsg): *PISA 2003: Kompetenzen für die Zukunft – Zweiter nationaler Bericht.* Bundesamt für Statistik und Schweizerische Konferenz der kantonalen Bildungsdirektoren, Neuchâtel, 2005. [erhältlich unter `http://www.portal-stat.admin.ch/pisa/download/pisa2003_rn2_d_def.pdf`]

[Zielke 2004] Zielke, Barbara: *Kognition und soziale Praxis – Der Soziale Konstruktionismus und die Perspektiven einer postkognitivistischen Psychologie.* Transcript Verlag, Bielefeld, 2004.

[Zimbardo & Gerrig 2004] Zimbardo, Philip G. / Gerrig, Richard J.: *Psychologie.* Pearson Studium, München, 2004[16].